

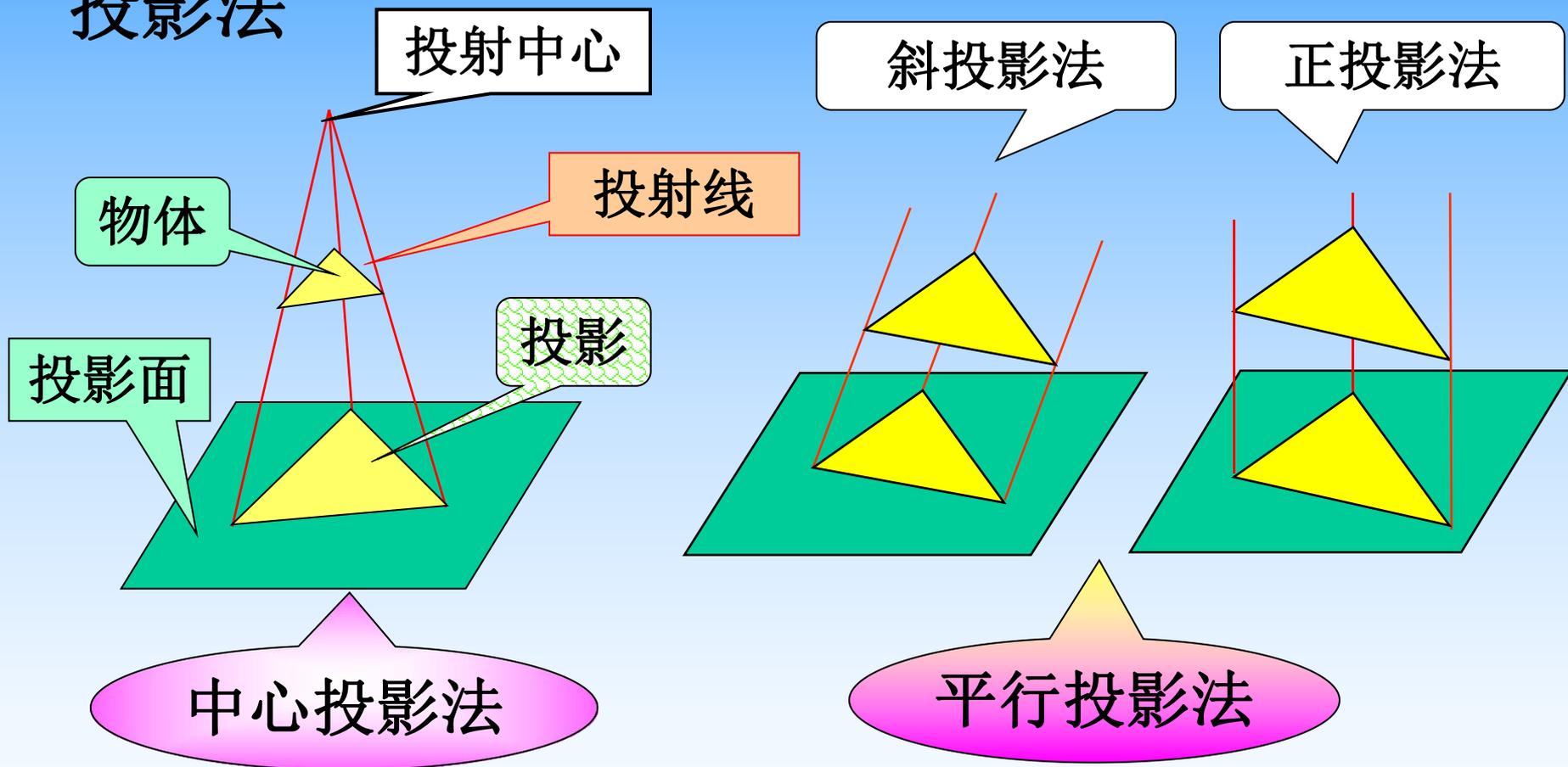
第2章 点、直线、平面的投影

- 2.1 投影法及其分类
- 2.2 点的投影
- 2.3 直线的投影
- 2.4 平面的投影
- 2.5 直线与平面及两平面的
相对位置
- 本章小结

结束放映

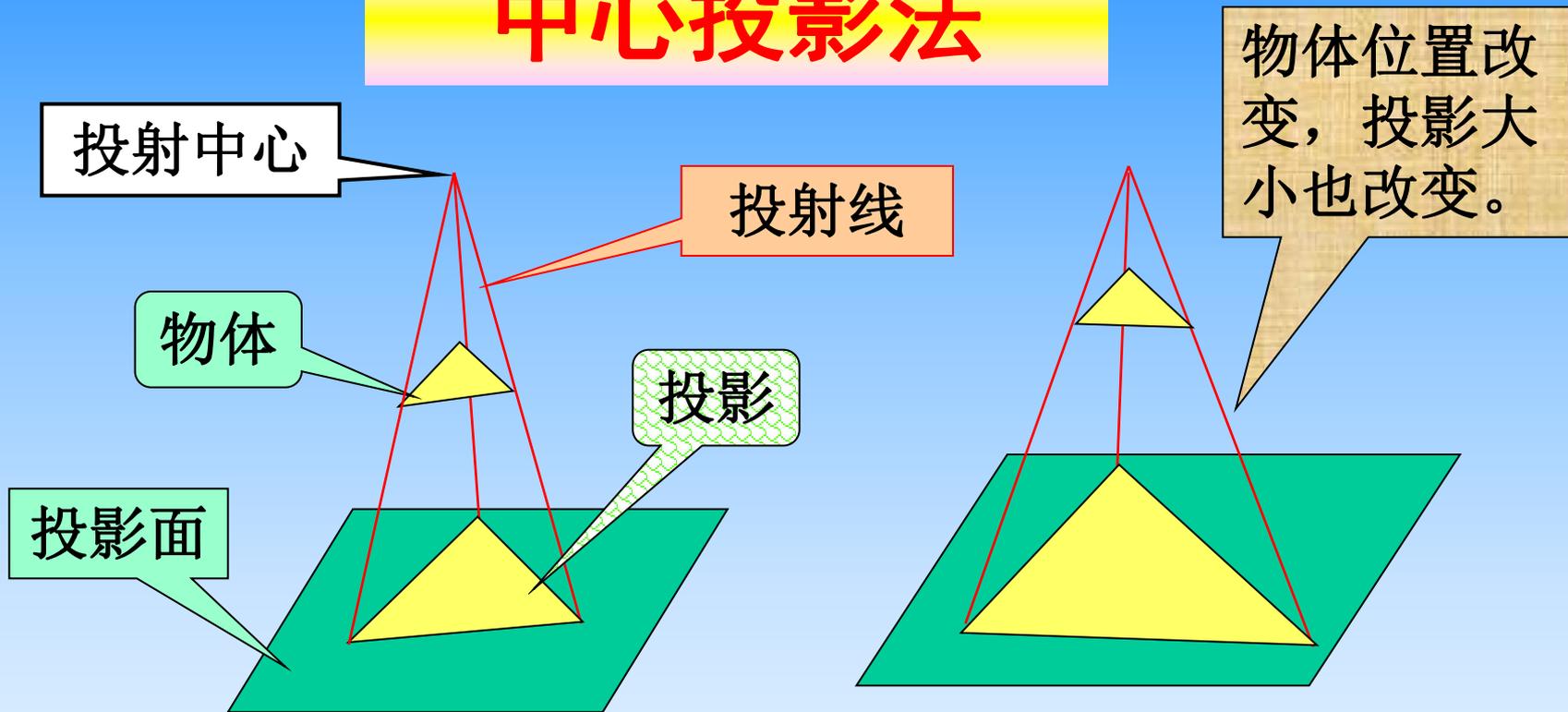
2.1 投影法及其分类

投影法



投射射线通过物体，向选定的平面进行投射，并在该面上得到图形的方法——**投影法**。

中心投影法

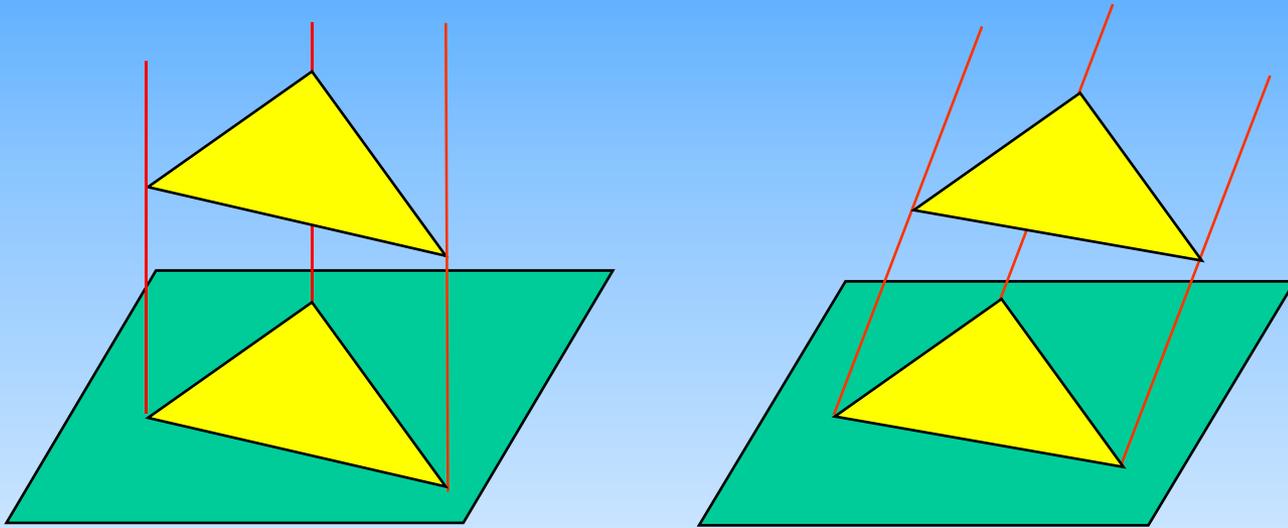


投影特性

投影中心、物体、投影面三者之间的相对距离对投影的大小有影响。

度量性较差。

平行投影法

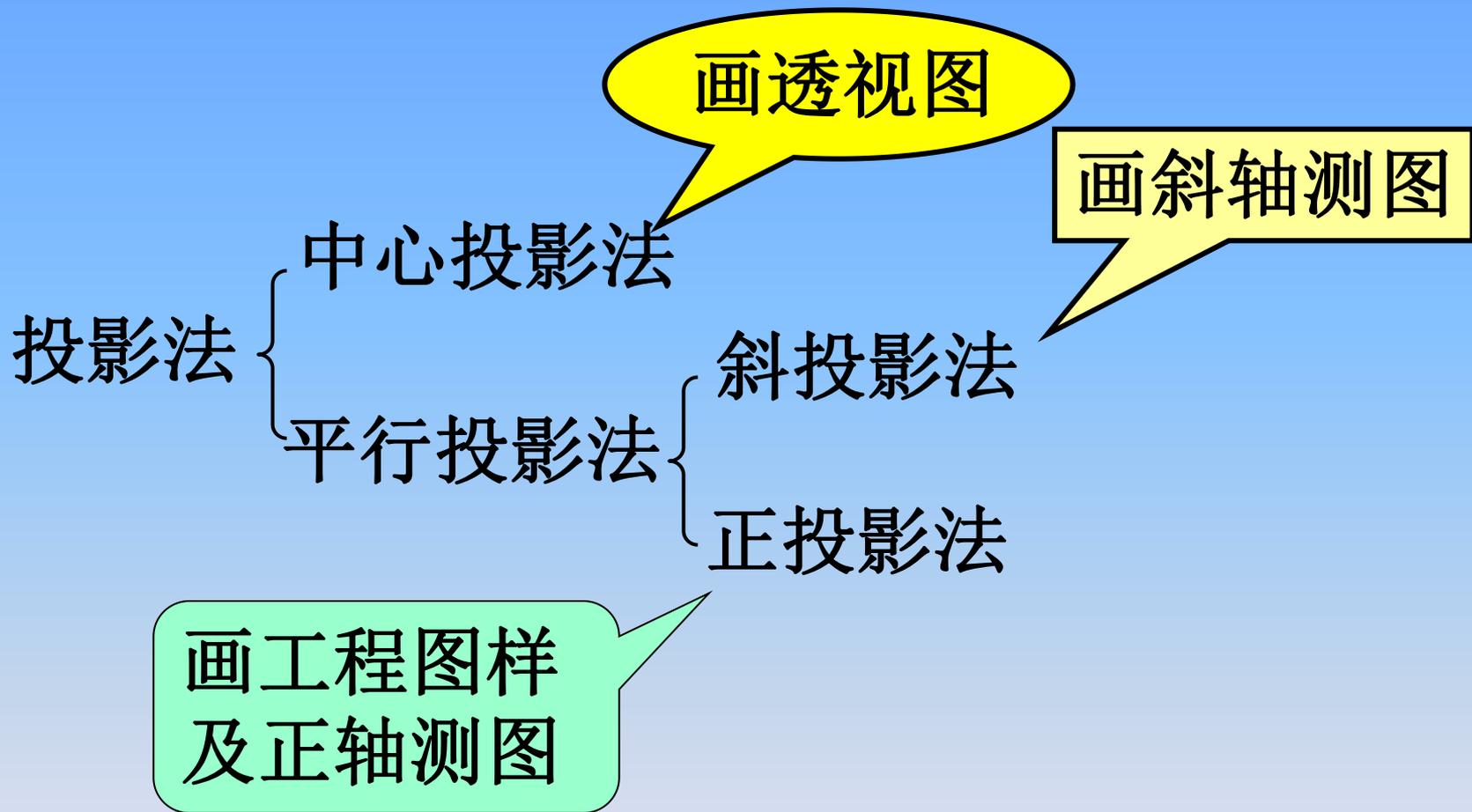


投影特性

投影大小与物体和投影面之间的距离无关。

度量性较好。

工程图样多数采用正投影法绘制。



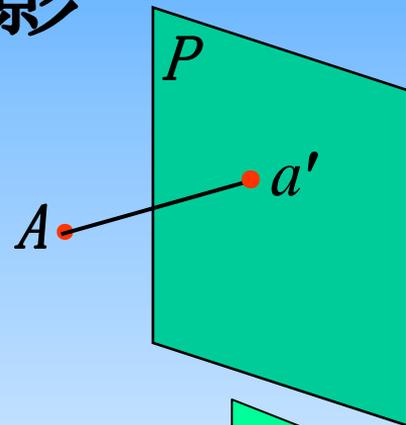
继续？

结束？

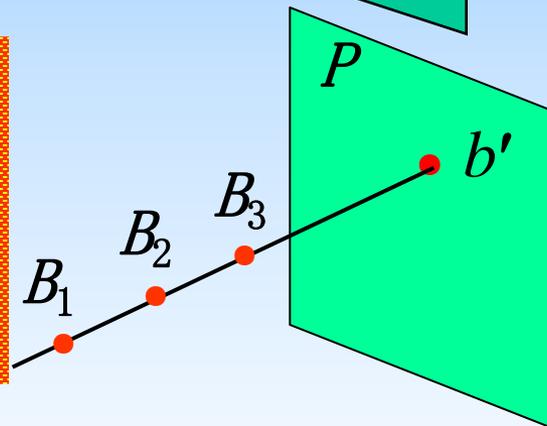
2.2 点的投影

一、点在一个投影面上的投影

过空间点A的投射射线与投影面P的交点即为点A在P面上的投影。



点在一个投影面上的投影不能确定点的空间位置。



解决办法？

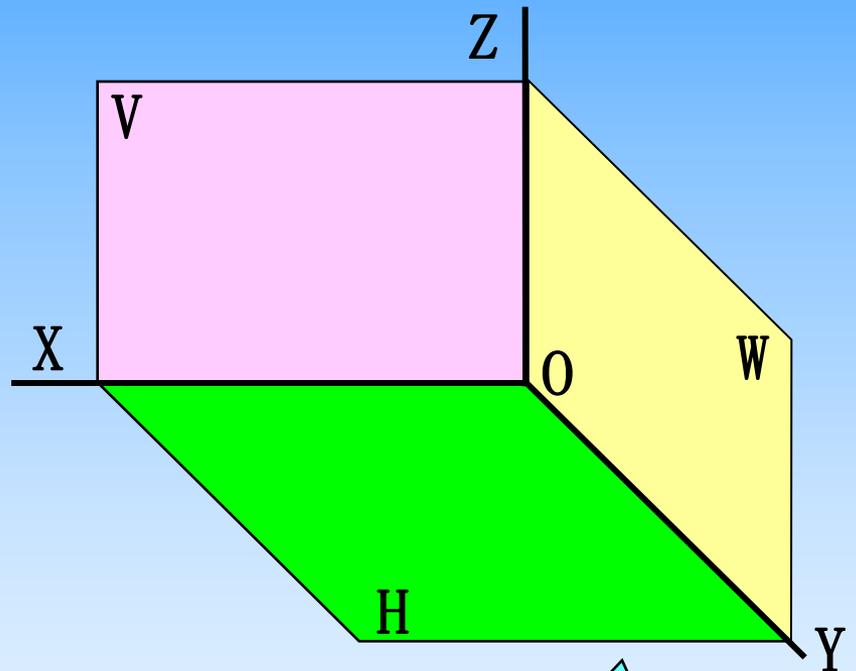


采用多面投影。

二、点的三面投影

投影面

- ◆ 正面投影面（简称正面或V面）
- ◆ 水平投影面（简称水平面或H面）
- ◆ 侧面投影面（简称侧面或W面）



投影轴

- | | |
|-----|----------|
| OX轴 | V面与H面的交线 |
| OY轴 | H面与W面的交线 |
| OZ轴 | V面与W面的交线 |

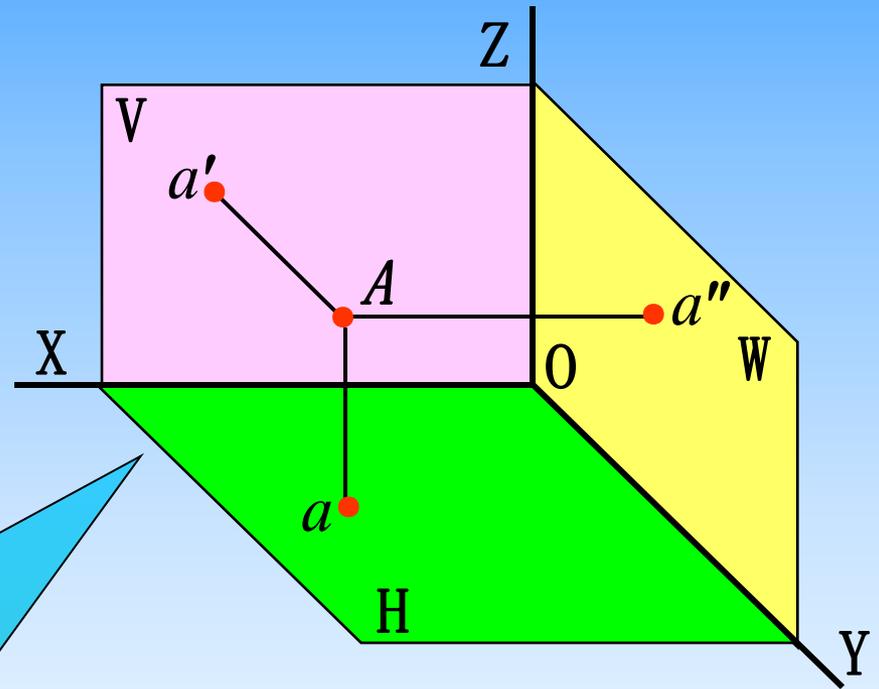
三个投影面
互相垂直

空间点A在三个投影面上的投影

a' ——点A的正面投影

a ——点A的水平投影

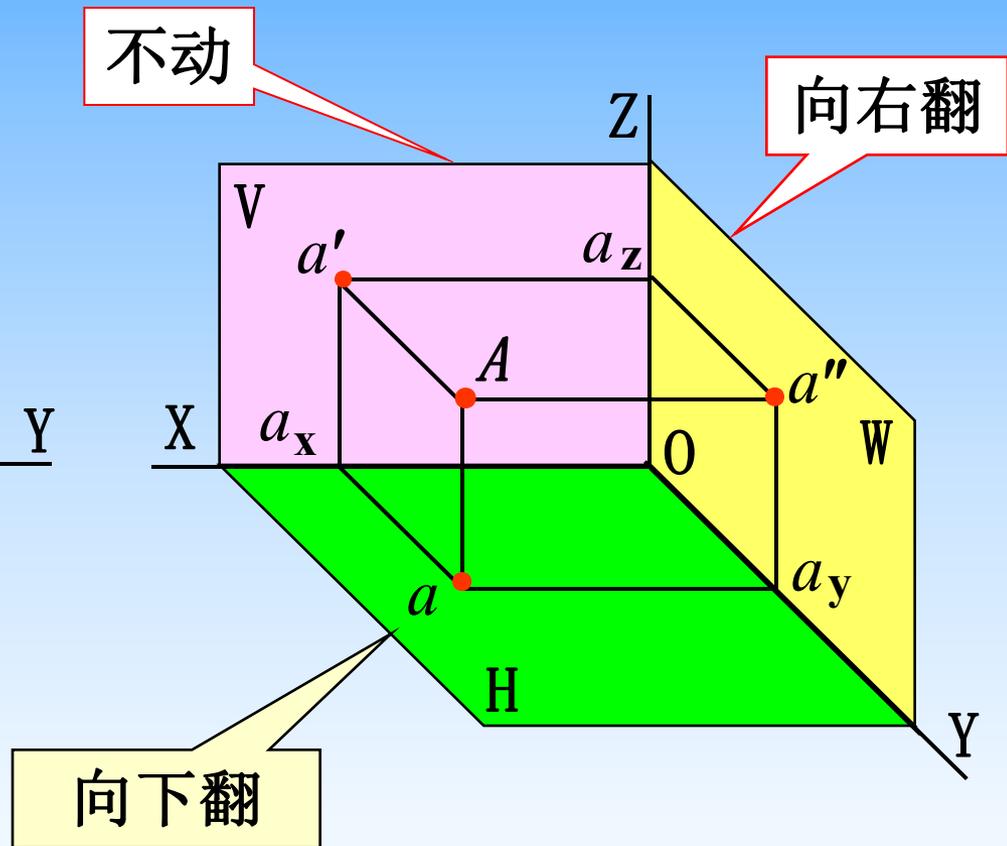
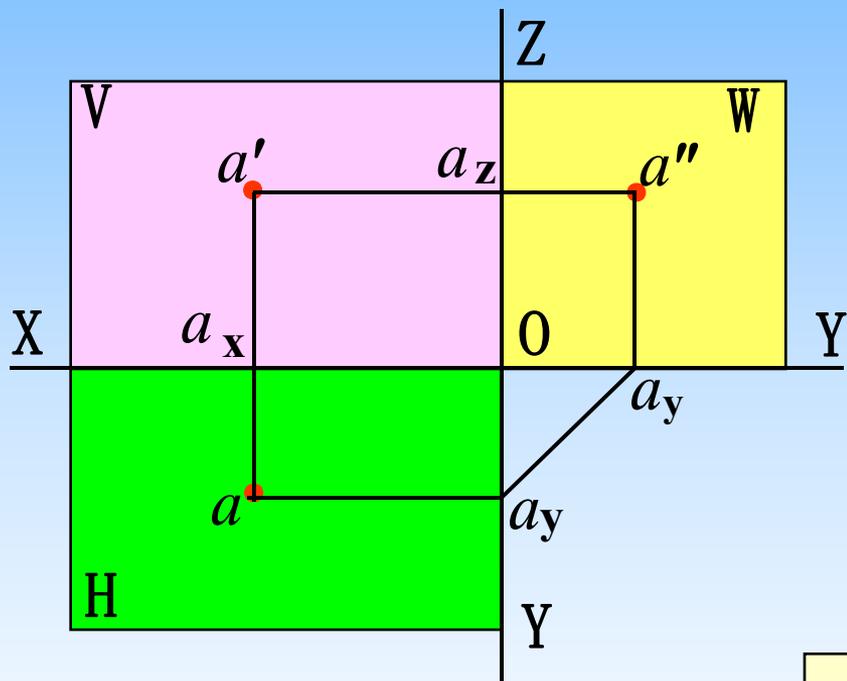
a'' ——点A的侧面投影

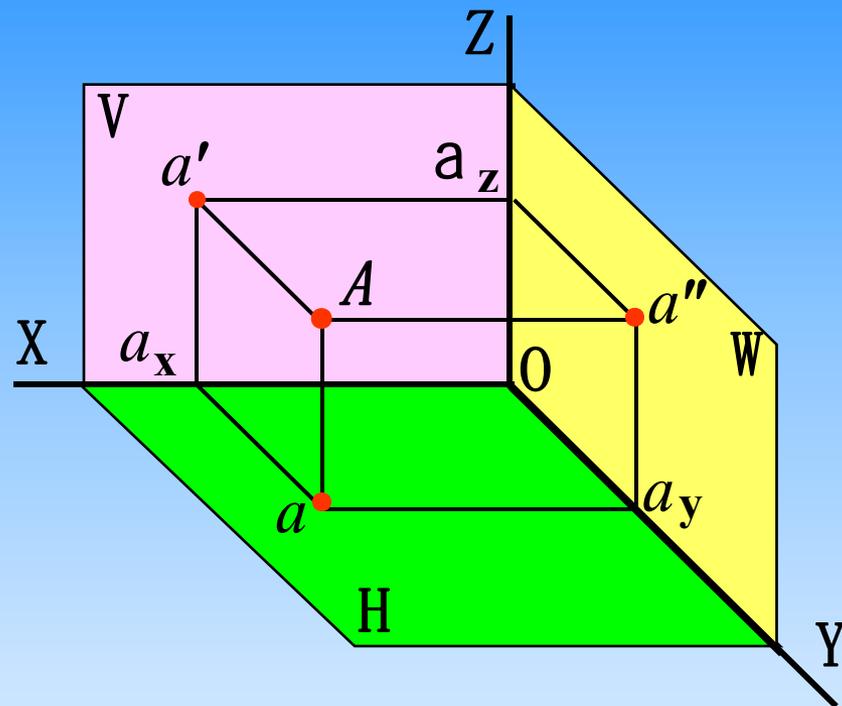
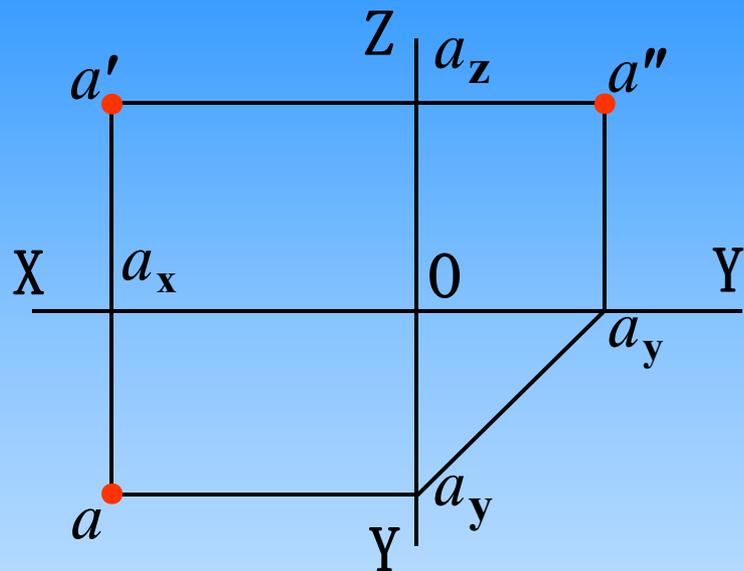


注意：

空间点用大写字母表示，点的投影用小写字母表示。

投影面展开



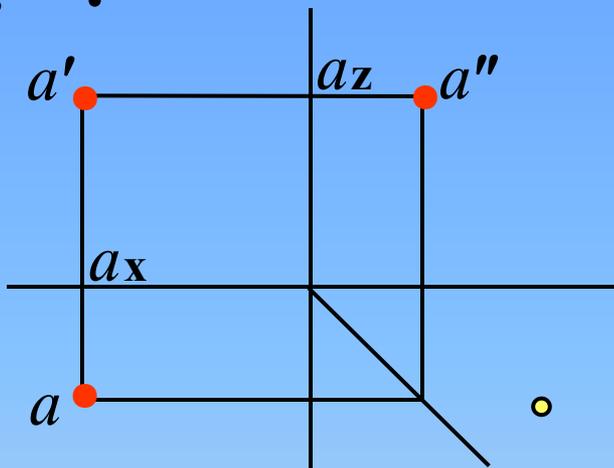


点的投影规律:

- ① $a'a \perp OX$ 轴 $a'a'' \perp OZ$ 轴
- ② $aa_x = a''a_z = y = Aa'$ (A到V面的距离)
- $aa_y = a'a_z = x = Aa''$ (A到W面的距离)
- $a'a_x = a''a_y = z = Aa$ (A到H面的距离)

例：已知点的两个投影，求第三投影。

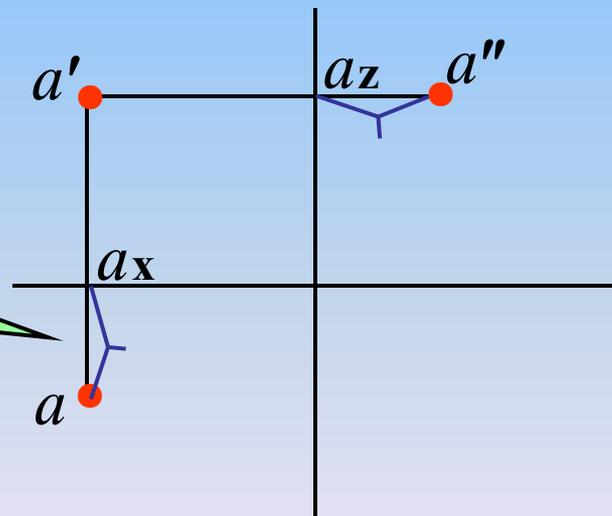
解法一：



通过作 45° 线
使 $a''a_z = aa_x$

解法二：

用圆规直接量
取 $a''a_z = aa_x$

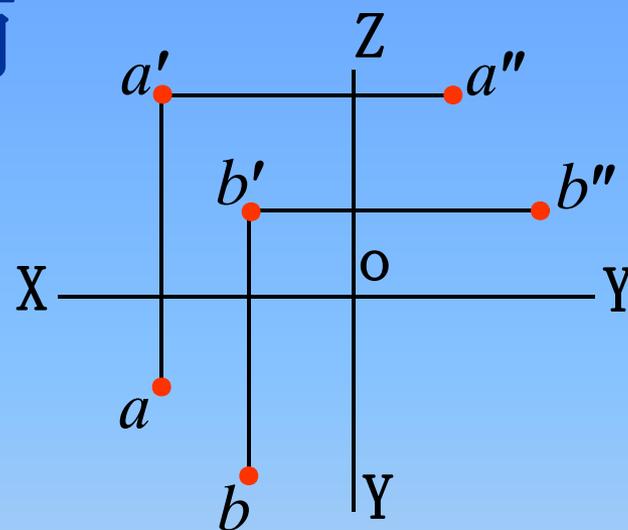


三、两点的相对位置

两点的相对位置指两点在空间的上下、前后、左右位置关系。

判断方法：

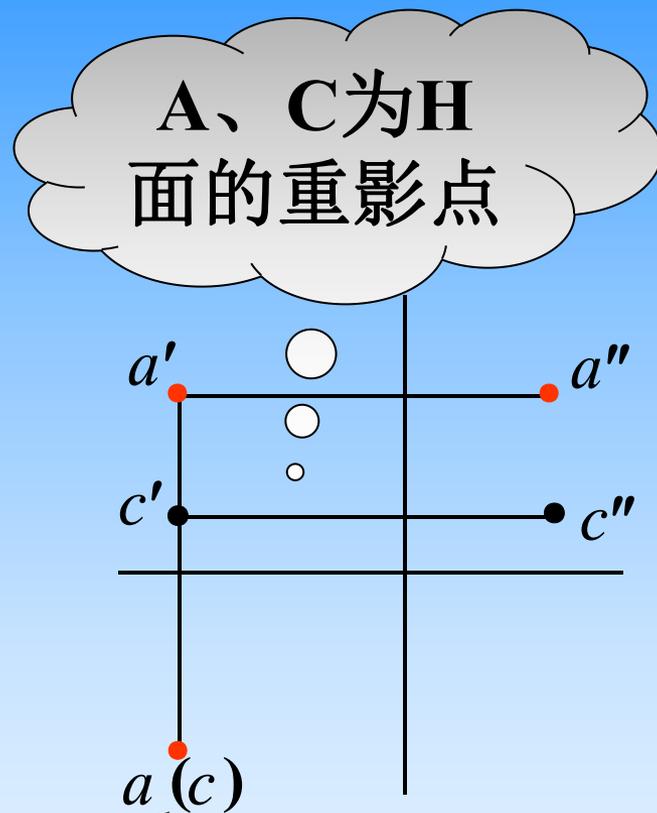
- ▲ x 坐标大的在左
- ▲ y 坐标大的在前
- ▲ z 坐标大的在上



**B点在A点之前、
之右、之下。**

重影点:

空间两点在某
一投影面上的**投影
重合为一点**时，则
称此两点为**该投影
面的重影点**。



被挡住的投
影加()



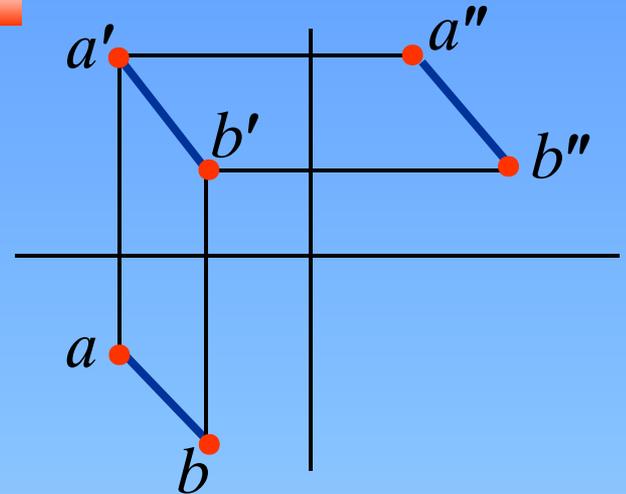
A、C为哪个投
影面的重影点
呢?

继续？

结束？

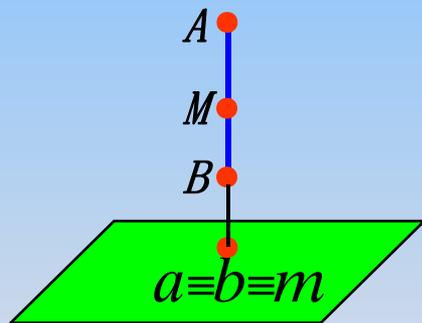
2.3 直线的投影

两点确定一条直线，将两点的同名投影用直线连接，就得到直线的同名投影。



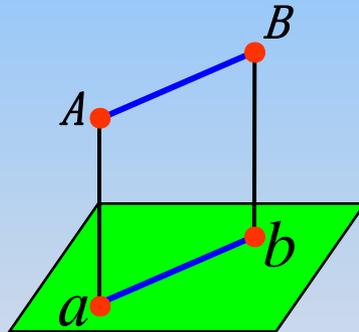
一、直线的投影特性

1. 直线对一个投影面的投影特性



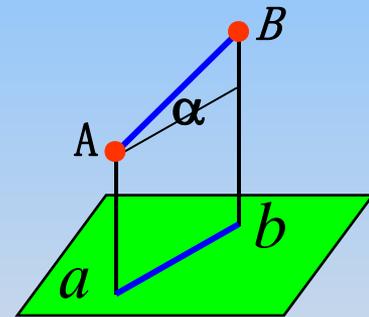
直线垂直于投影面
投影重合为一点

积聚性



直线平行于投影面
投影反映线段实长

$$ab=AB$$

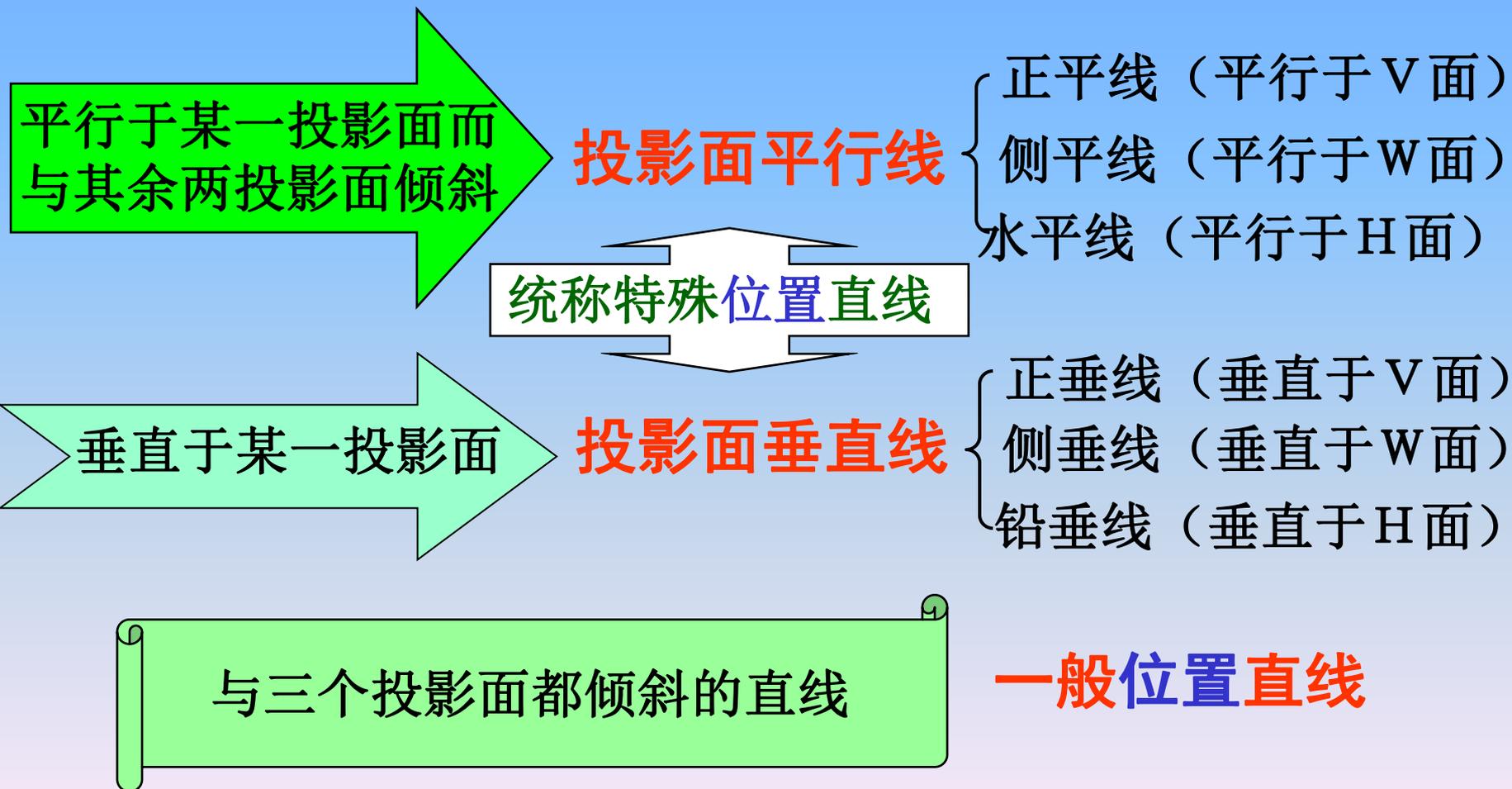


直线倾斜于投影面
投影比空间线段短

$$ab=AB \cdot \cos\alpha$$

2. 直线在三个投影面中的投影特性

其投影特性取决于直线与三个投影面间的相对位置

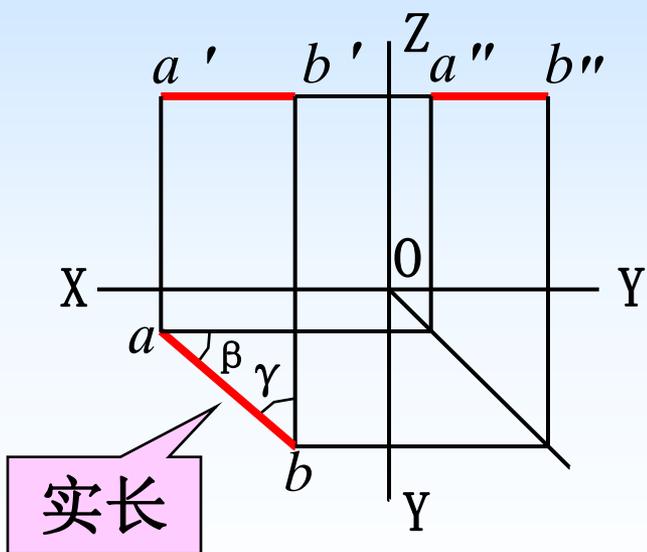
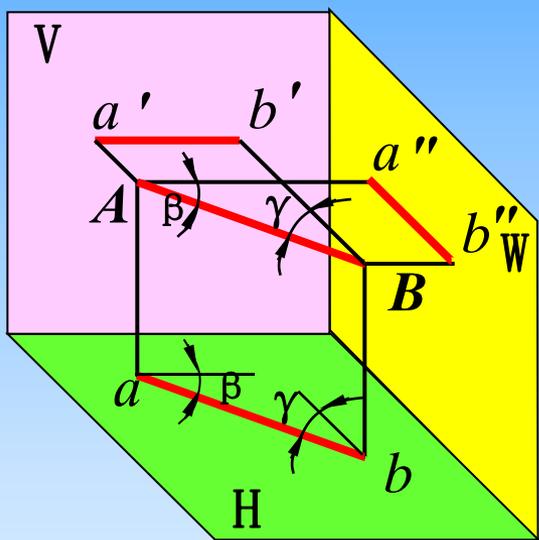


(1) 投影面平行线

水平线

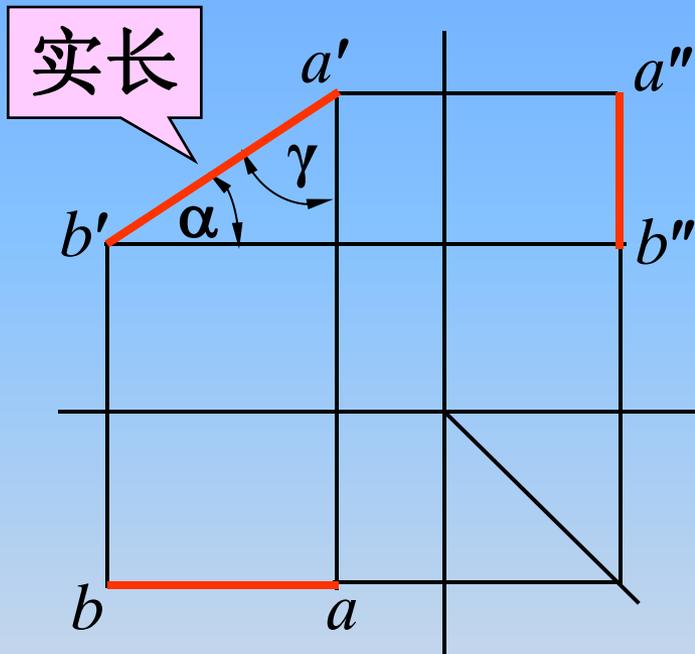
投影特性:

- ① 在其平行的那个投影面上的投影反映实长，并反映直线与另两投影面倾角的实大。
- ② 另两个投影面上的投影平行于相应的投影轴，其到相应投影轴距离反映直线与它所平行的投影面之间的距离。

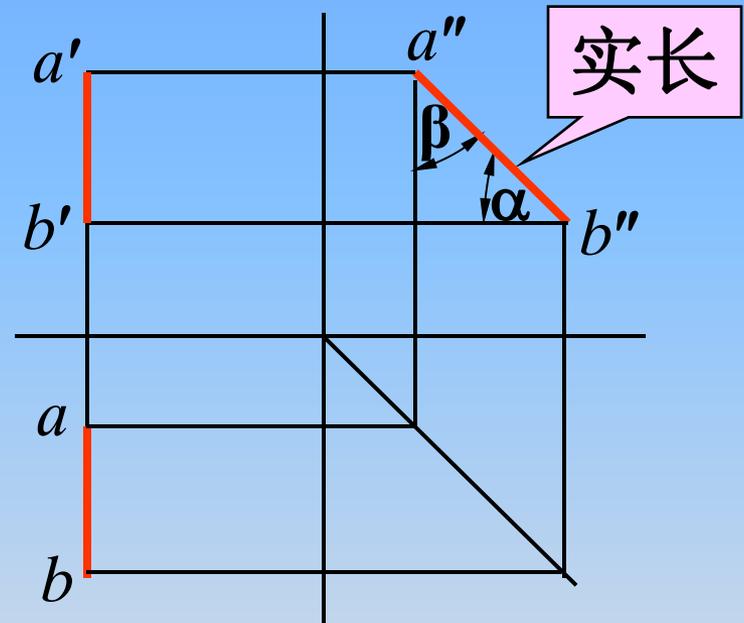


判断下列直线是什么位置的直线？

正平线



侧平线



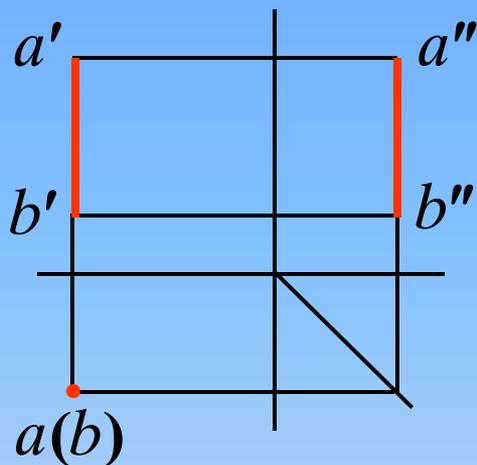
直线与投影面夹角的表示法：

与H面的夹角： α 与V面的角： β

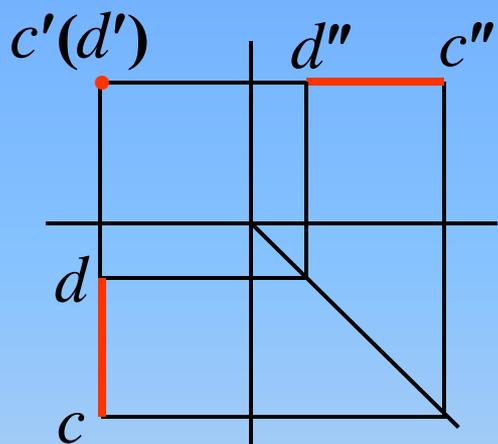
与W面的夹角： γ

(2) 投影面垂直线

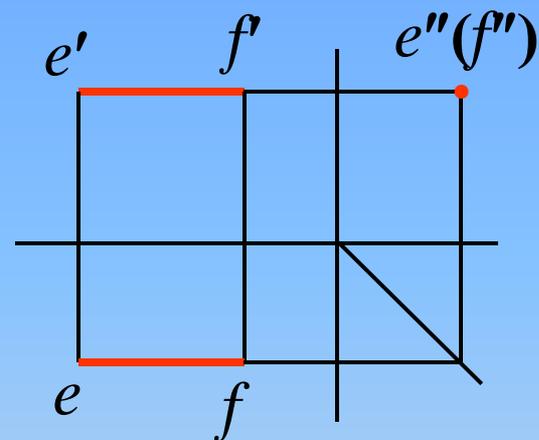
铅垂线



正垂线



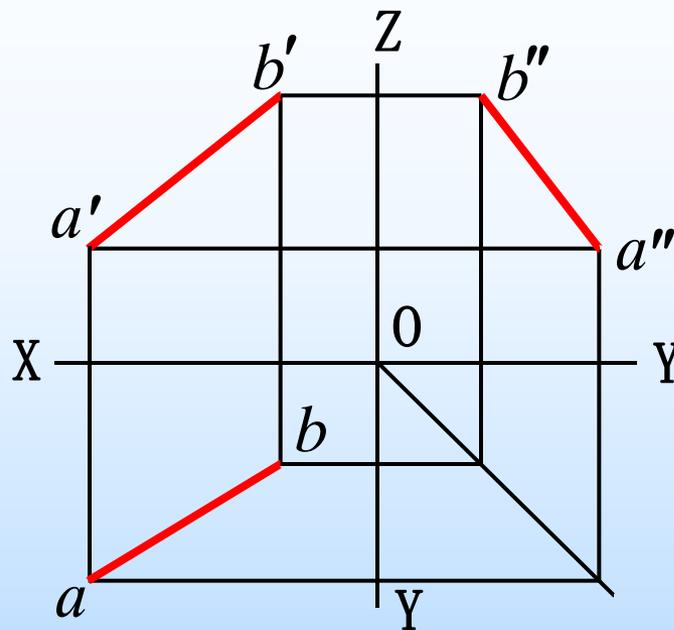
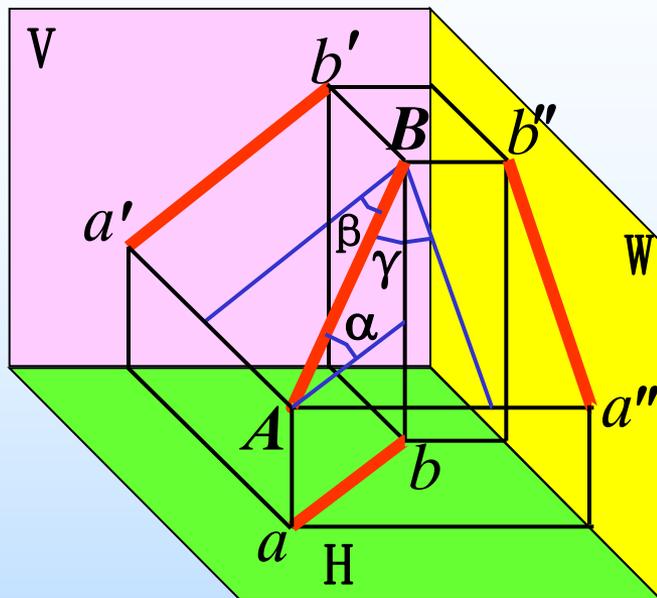
侧垂线



投影特性:

- ① 在其垂直的投影面上，投影有积聚性。
- ② 另外两个投影，反映线段实长，且垂直于相应的投影轴。

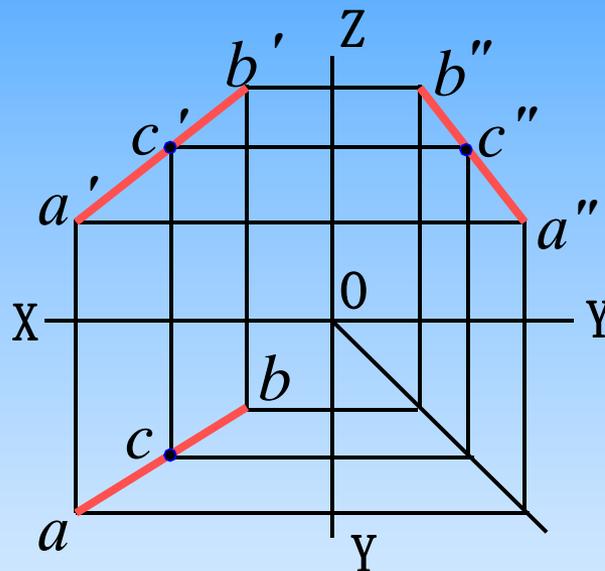
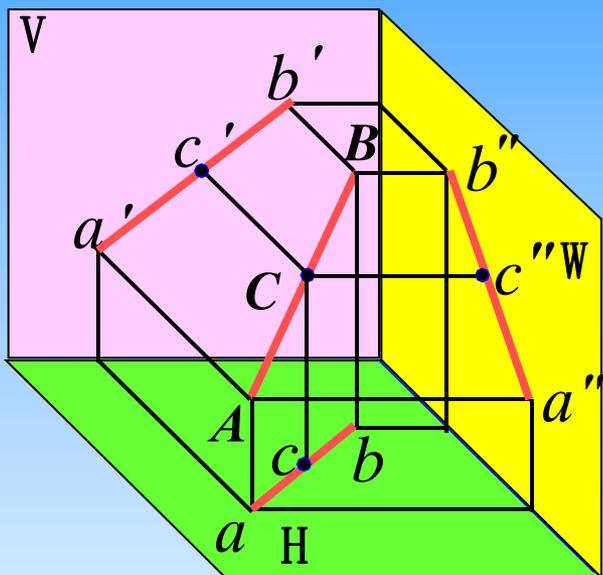
(3) 一般位置直线



投影特性

三个投影都倾斜于投影轴，其与投影轴的夹角并不反映空间线段与三个投影面夹角的大小。三个投影的长度均比空间线段短，即都不反映空间线段的实长。

二、直线与点的相对位置



◆若点在直线上, 则点的投影必在直线的同名投影上。

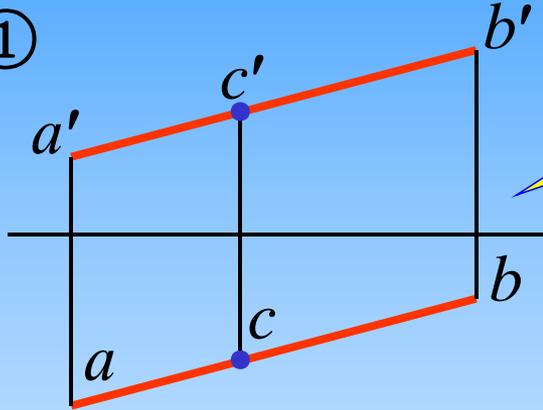
◆点的投影将线段的同名投影分割成与空间线段相同的比例。即:

$$AC:CB=ac:cb=a'c':c'b'=a''c'':c''b''$$

定比定理

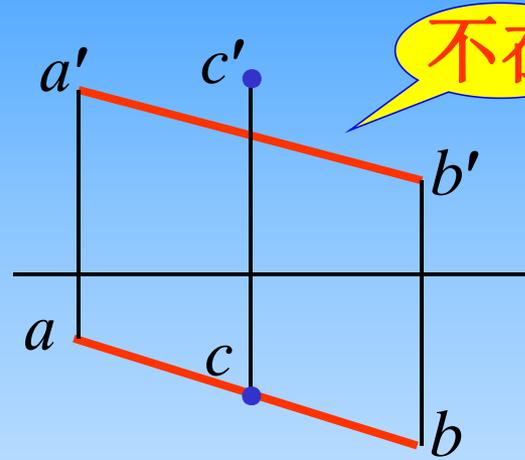
例1：判断点C是否在线段AB上。

①



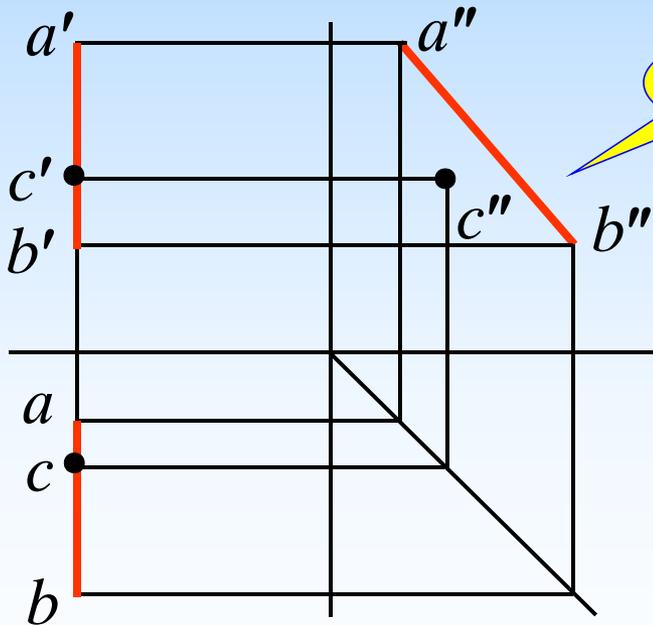
在

②



不在

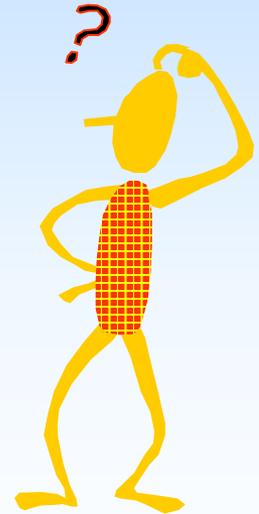
③



不在

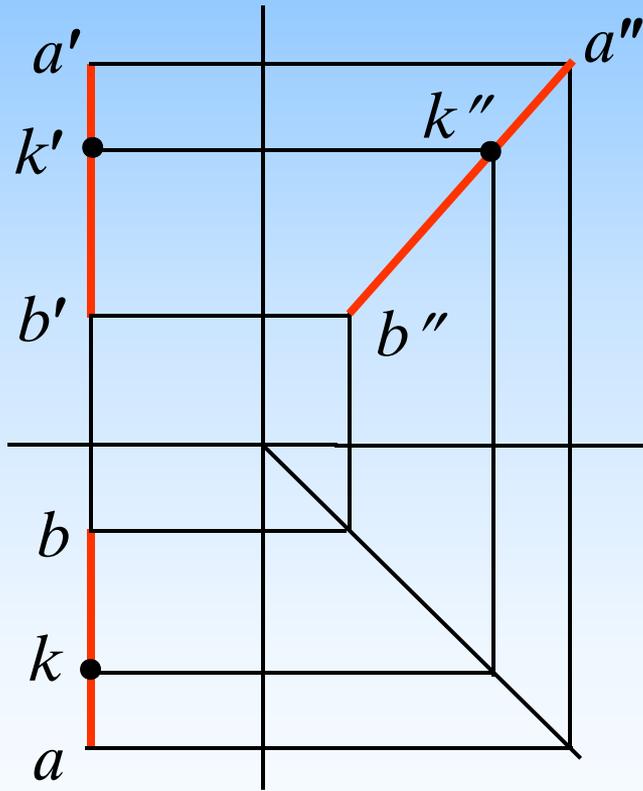
另一判断法？

应用定比定理

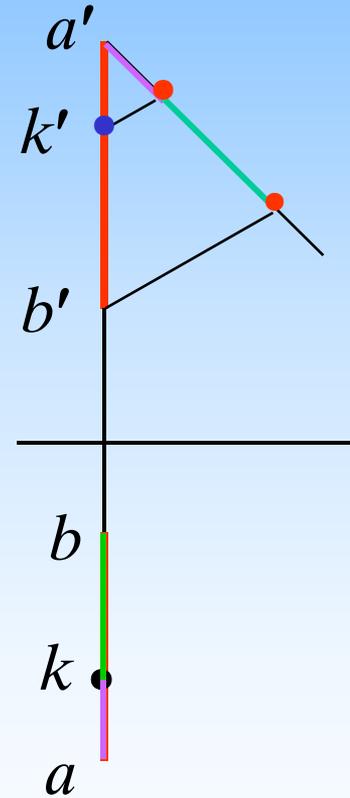


例2： 已知点K在线段AB上， 求点K正面投影。

解法一：
(应用第三投影)



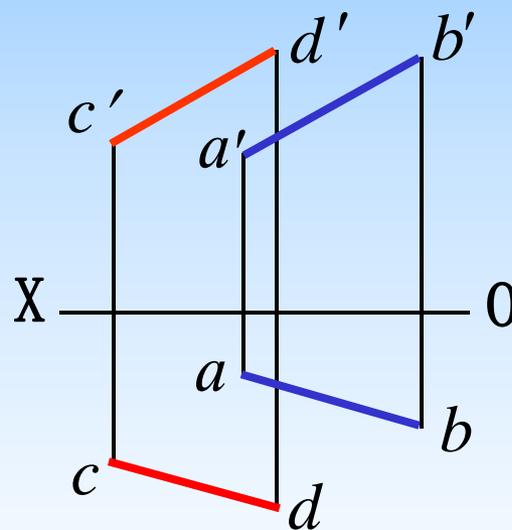
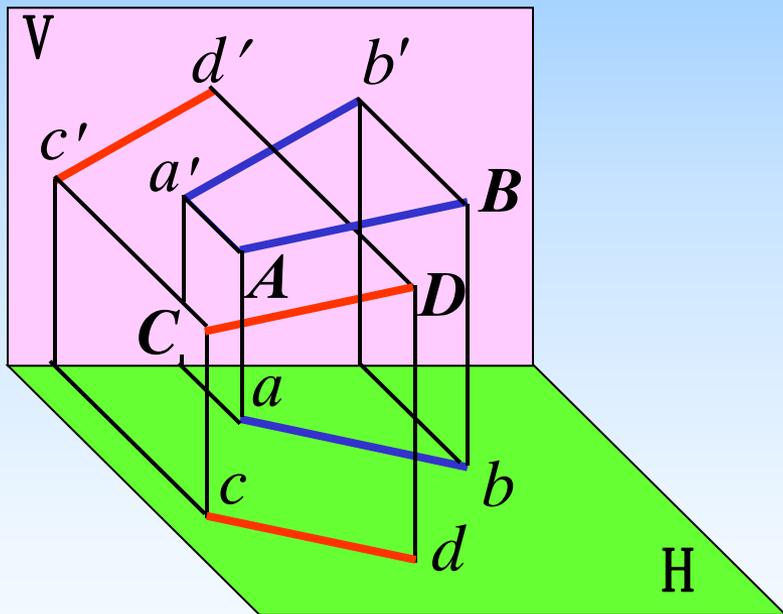
解法二：
(应用定比定理)



三、两直线的相对位置

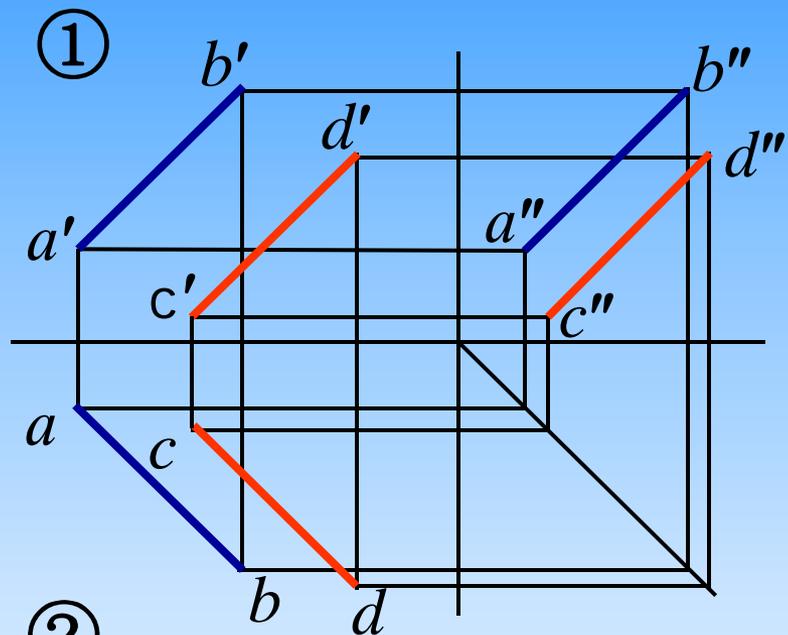
空间两直线的相对位置分为：
平行、相交、交叉（异面）。

1. 两直线平行



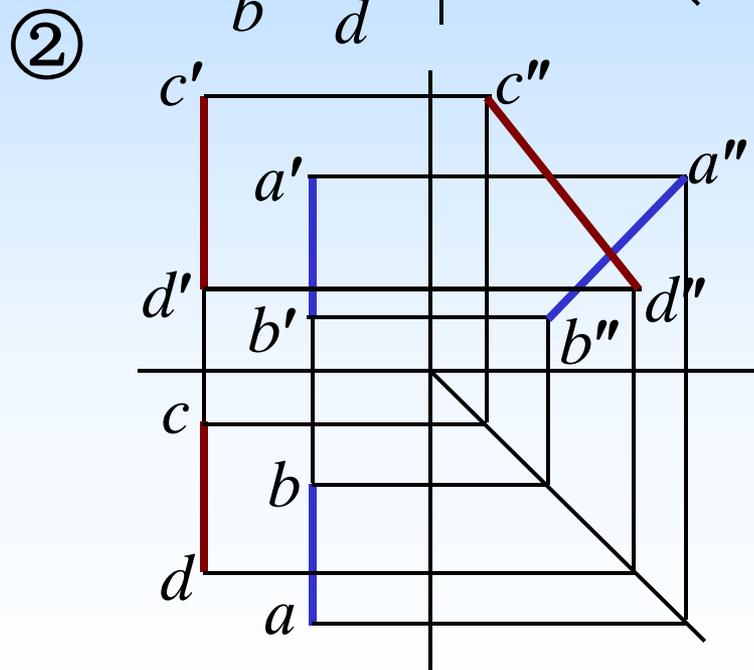
空间两直线平行，则其各同名投影必相互平行，反之亦然。

例：判断图中两条直线是否平行。



AB与CD平行。

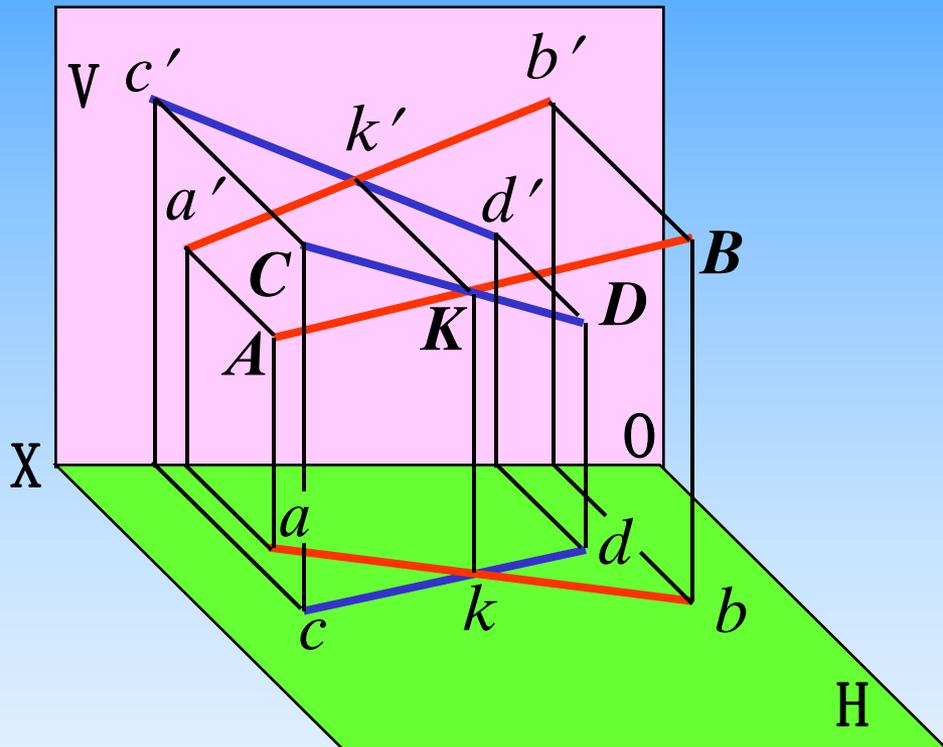
对于一般位置直线，只要有两组同名投影互相平行，空间两直线就平行。



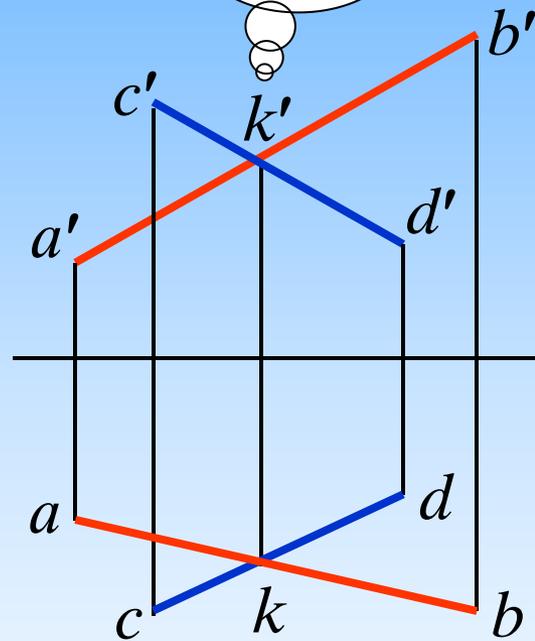
AB与CD不平行。

对于特殊位置直线，只有两组同名投影互相平行，空间直线不一定平行。

2. 两直线相交

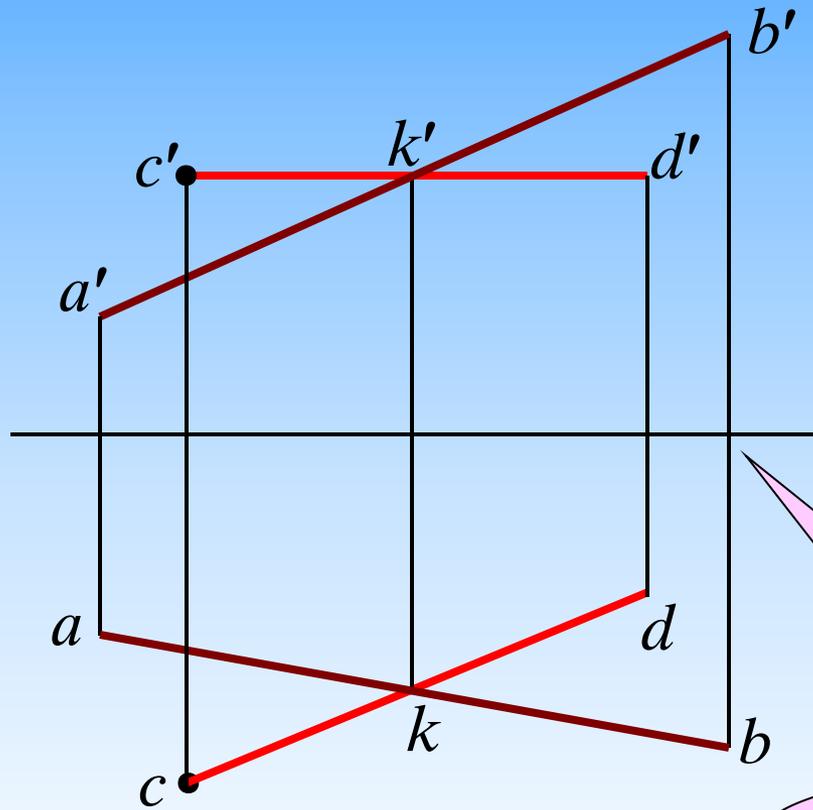


交点是两直线的共有点



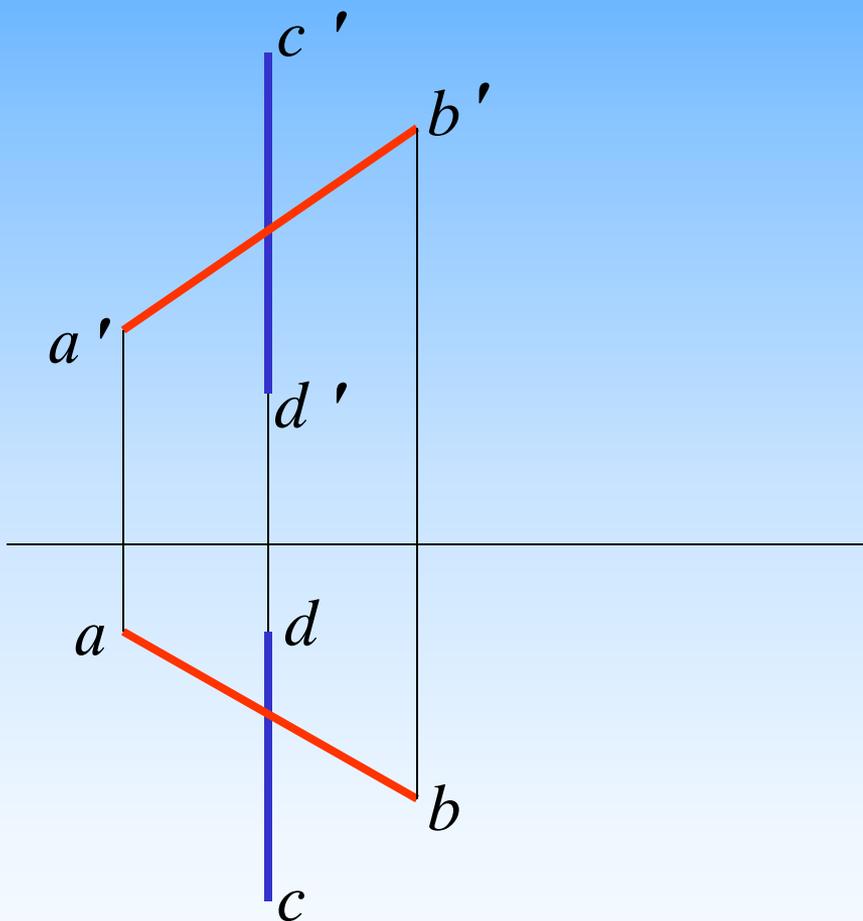
若空间两直线相交，则其同名投影必相交，且交点的投影必符合空间一点的投影特性。

例1：过C点作水平线CD与AB相交。



先作正面投影

例2：判断直线AB、CD的相对位置。



相交吗？

不相交！

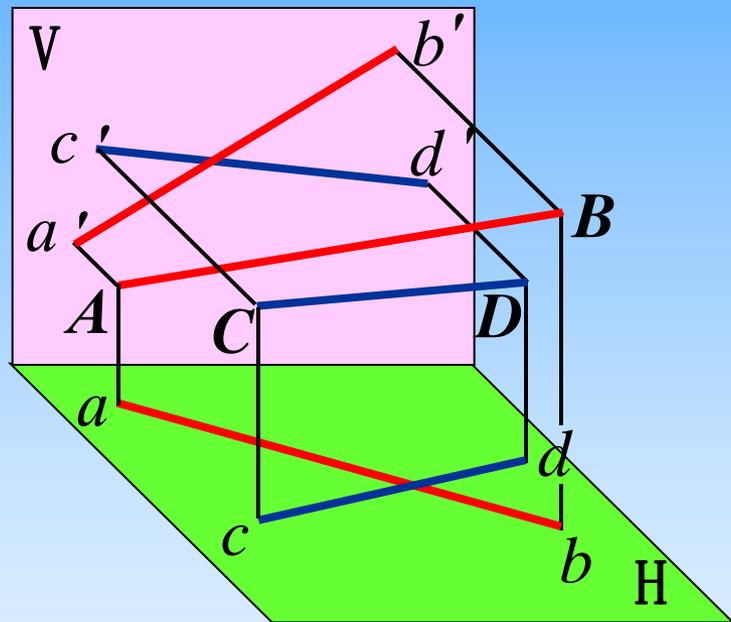
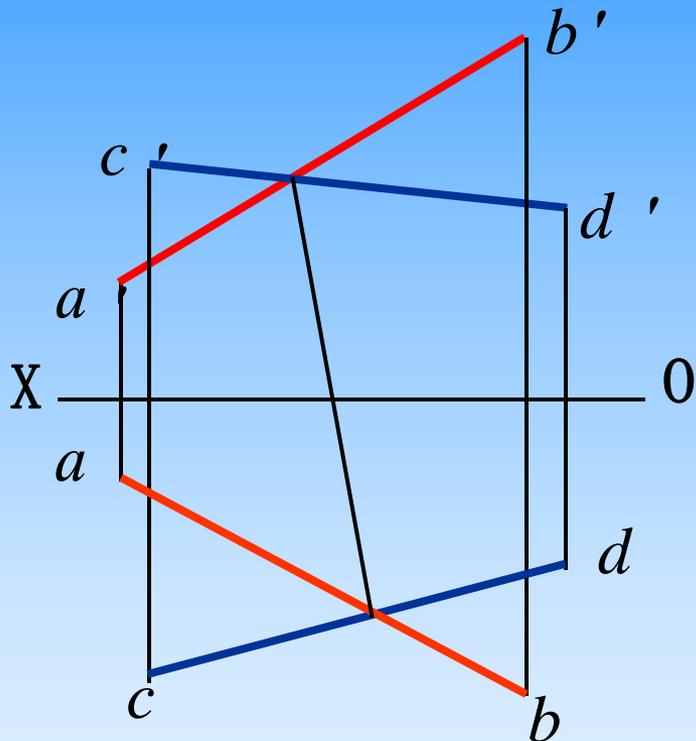
为什么？

交点不符合空间一个点的投影特性。

判断方法？

1. 应用定比定理
2. 利用侧面投影

3. 两直线交叉

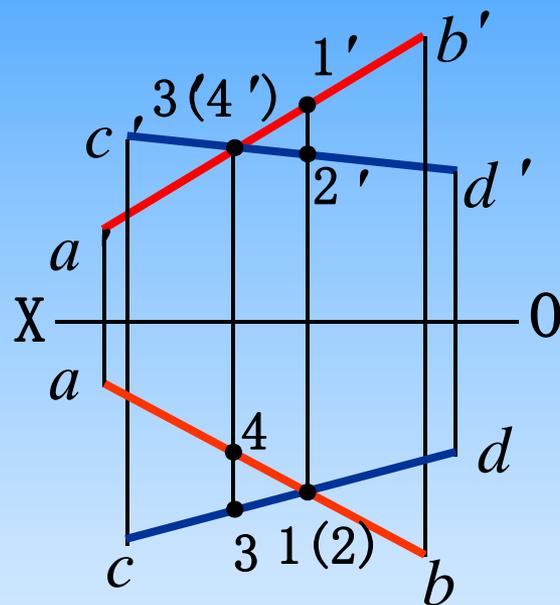
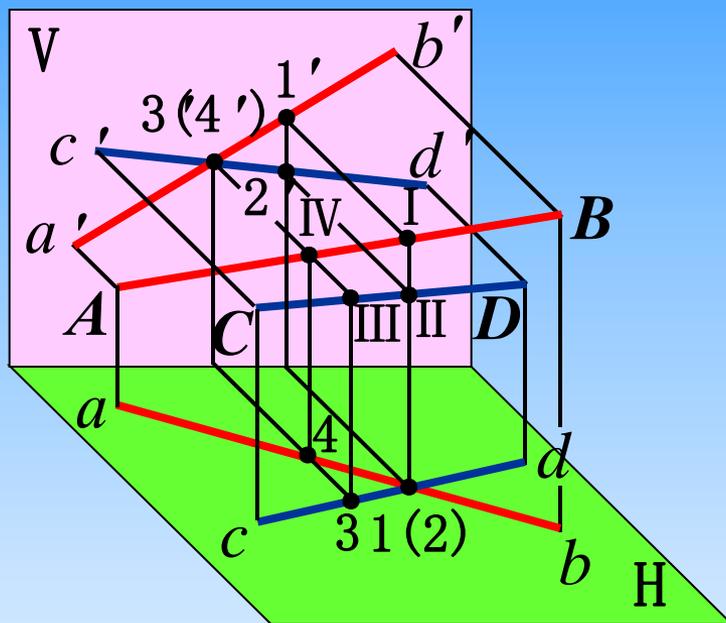


两直线相交吗？

不相交！

交点不符合一个

点的投影规律！



投影特性:

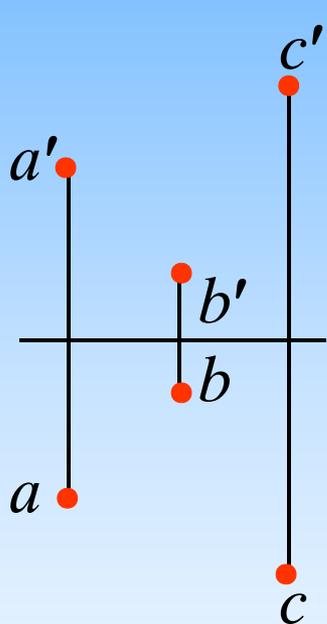
- ★ 同名投影可能相交，但“交点”不符合空间一个点的投影规律。
- ★ “交点”是两直线上的一对重影点的投影，用其可帮助判断两直线的空间位置。

继续？

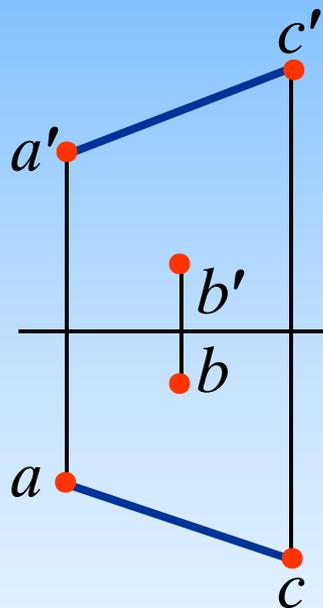
结束？

2.4 平面的投影

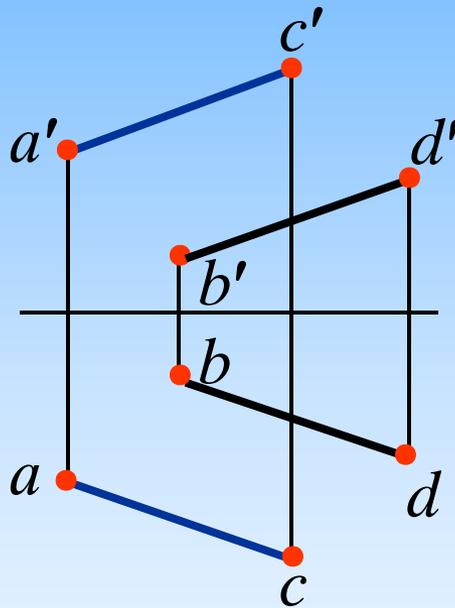
一、平面的表示法



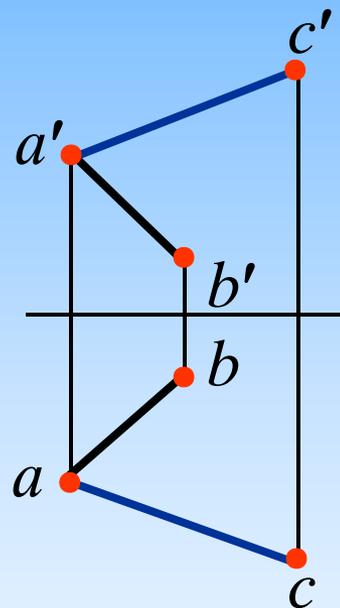
不在同一直线上的三个点



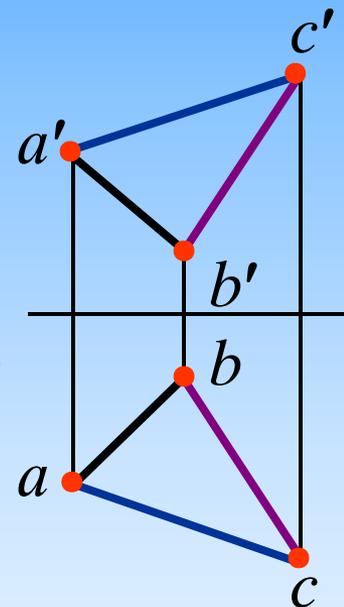
直线及线外一点



两平行直线



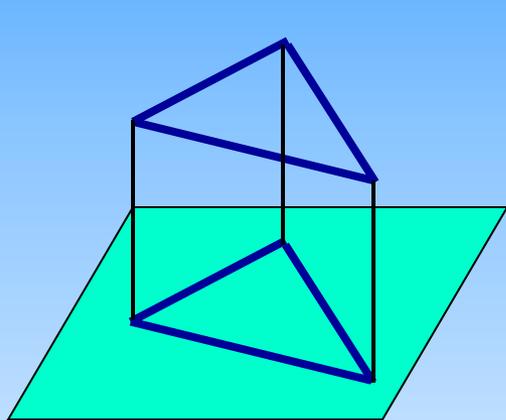
两相交直线



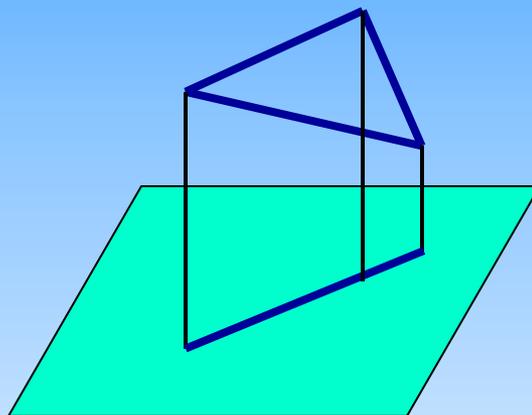
平面图形

二、平面的投影特性

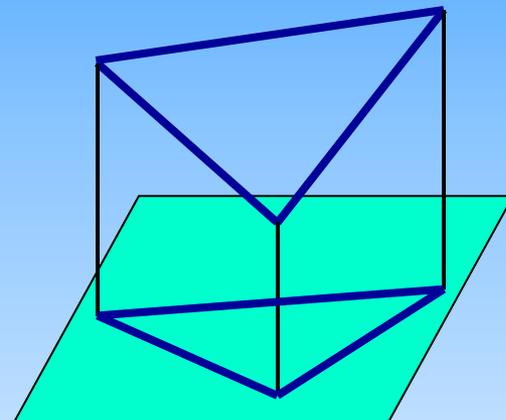
1. 平面对一个投影面的投影特性



平行



垂直



倾斜

投 影 特 性

- ★平面平行投影面——投影就把实形现
- ★平面垂直投影面——投影积聚成直线
- ★平面倾斜投影面——投影类似原平面

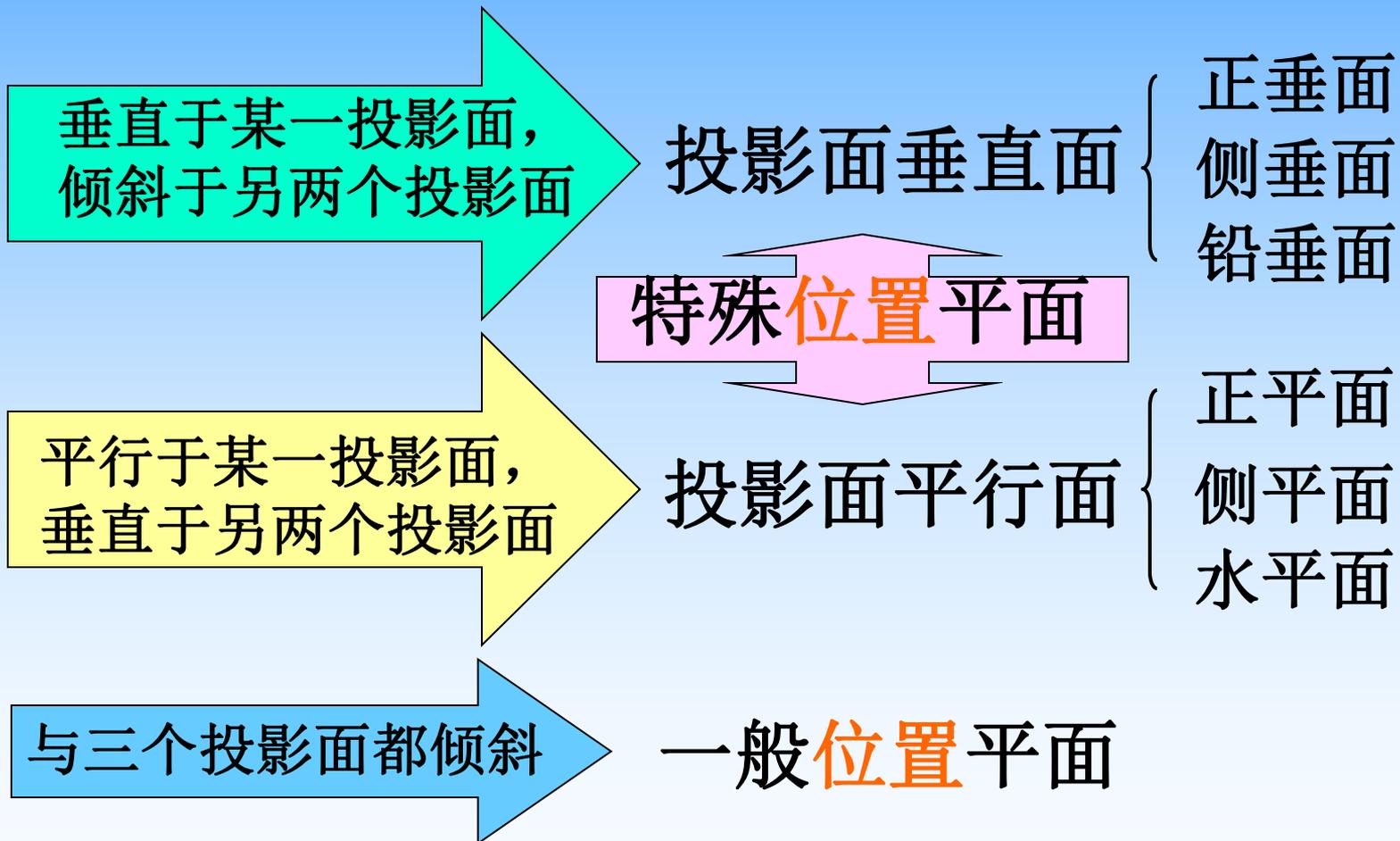
实形性

积聚性

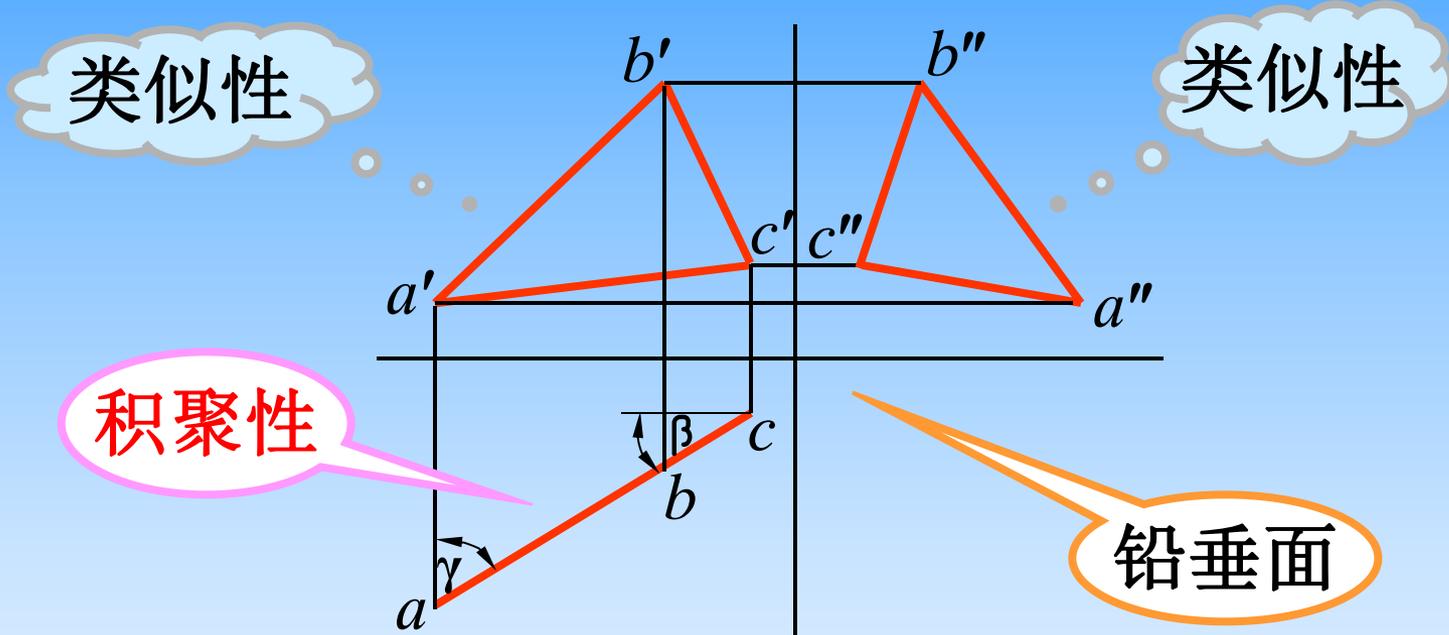
类似性

2. 平面在三投影面体系中的投影特性

平面对于三投影面的位置可分为三类：



(1) 投影面垂直面

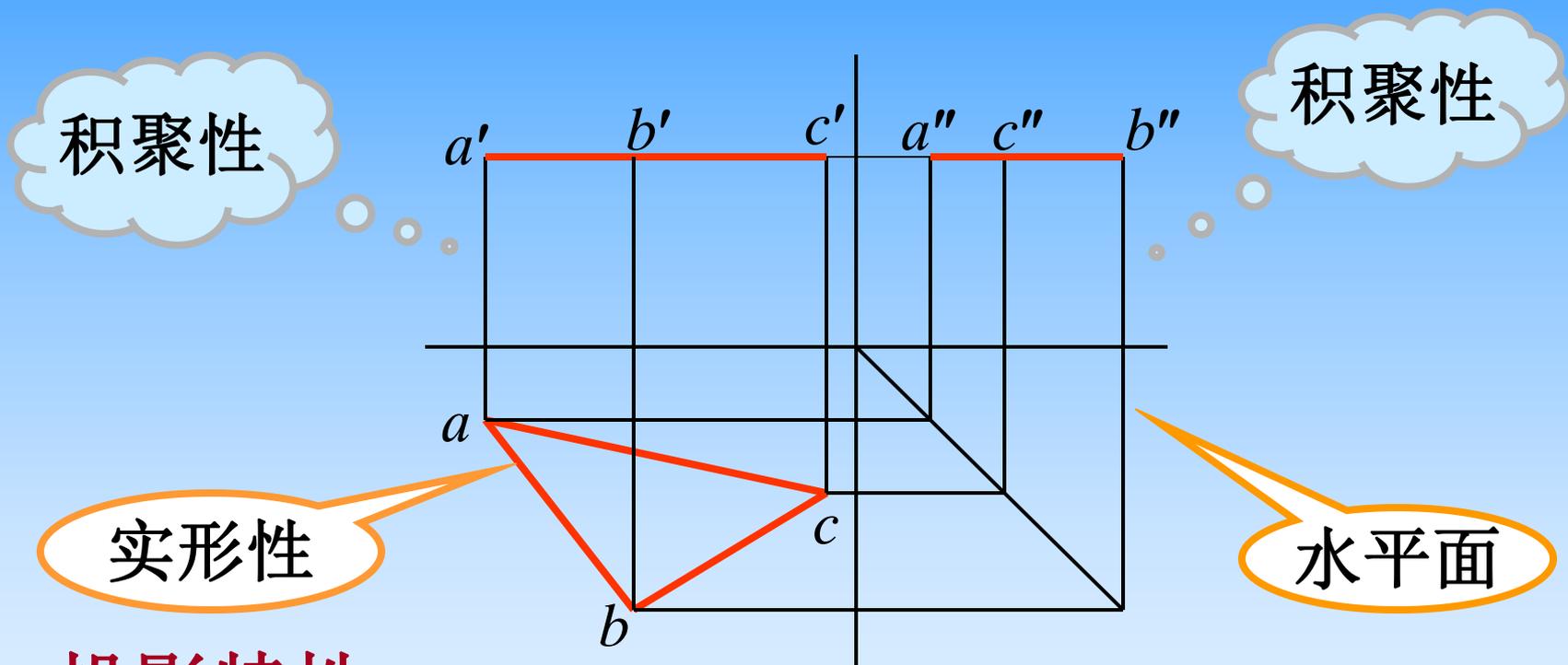


投影特性:

在它垂直的投影面上的投影积聚成直线。该直线与投影轴的夹角反映空间平面与另外两投影面夹角的大小。

另外两个投影面上的投影为类似形。

(2) 投影面平行面

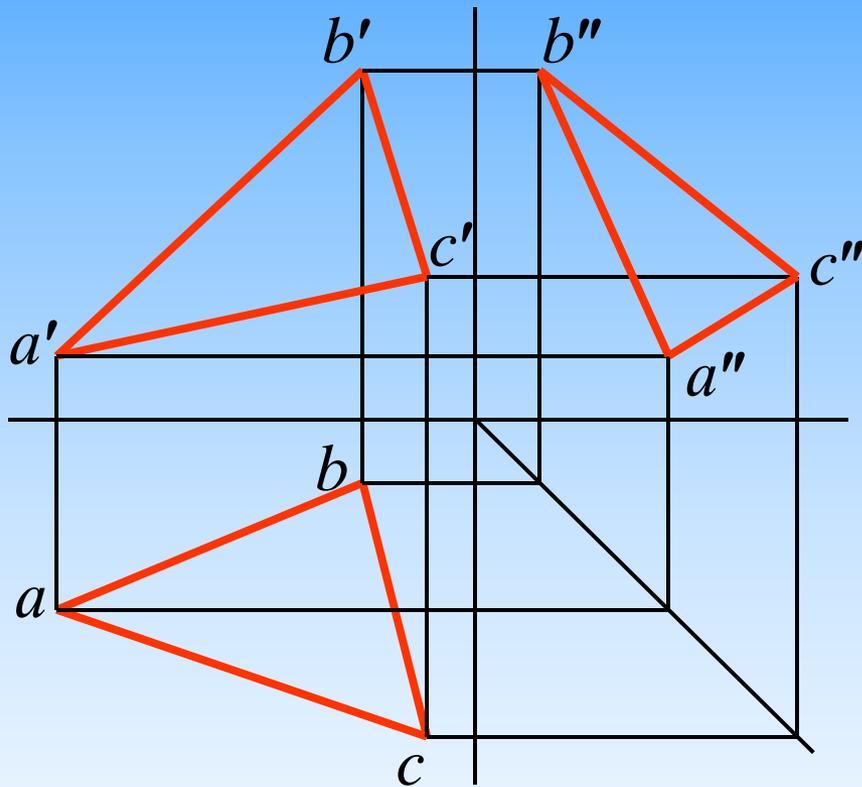


投影特性：

在它所平行的投影面上的投影反映实形。

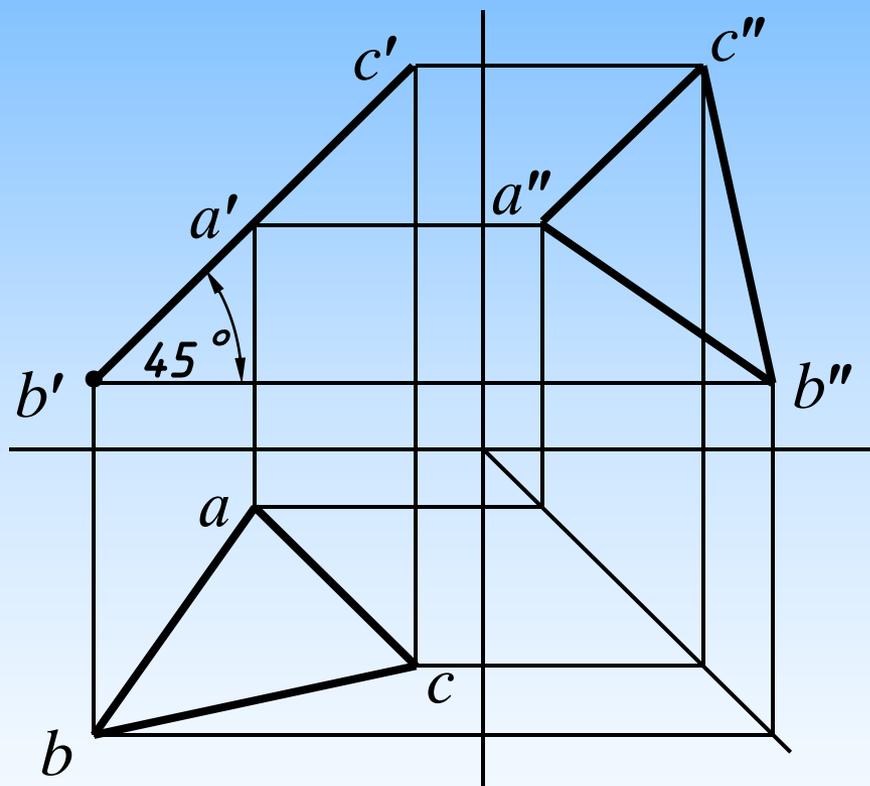
另两个投影面上的投影分别积聚成与相应的投影轴平行的直线。

(3) 一般位置平面



投影特性：
三个投影都类似。

例：正垂面ABC与H面的夹角为 45° ，已知其水平投影及顶点B的正面投影，求 $\triangle ABC$ 的正面投影及侧面投影。



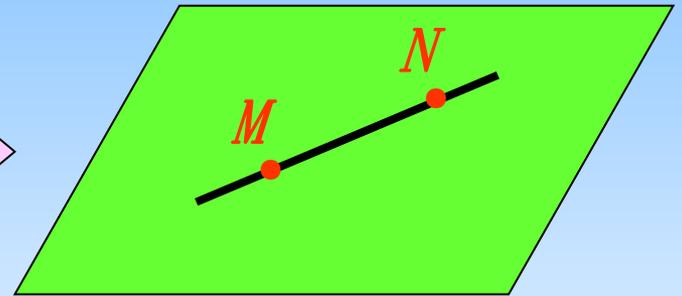
思考：此题有几个解？

三、平面上的直线和点

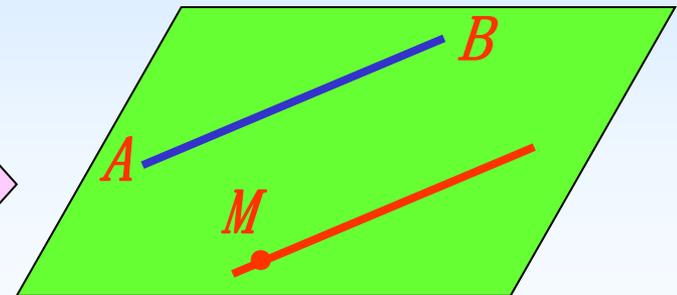
1. 平面上取任意直线

位于平面上的直线应满足的条件：

若一直线过平面上的
的两点，则此直线
必在该平面内。

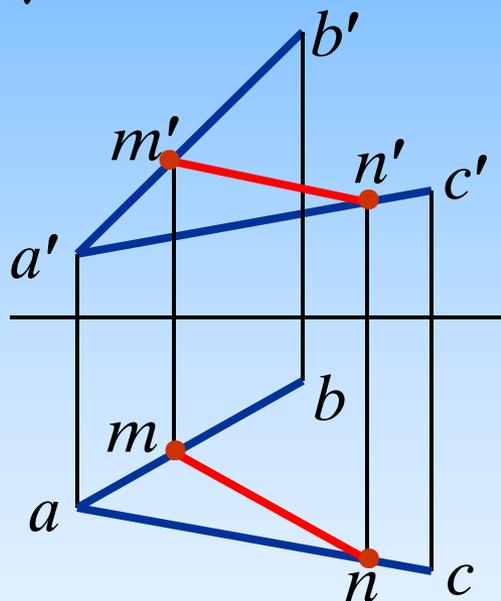


若一直线过平面上
的一点且平行于该
平面上的另一直线，
则此直线在该平面
内。

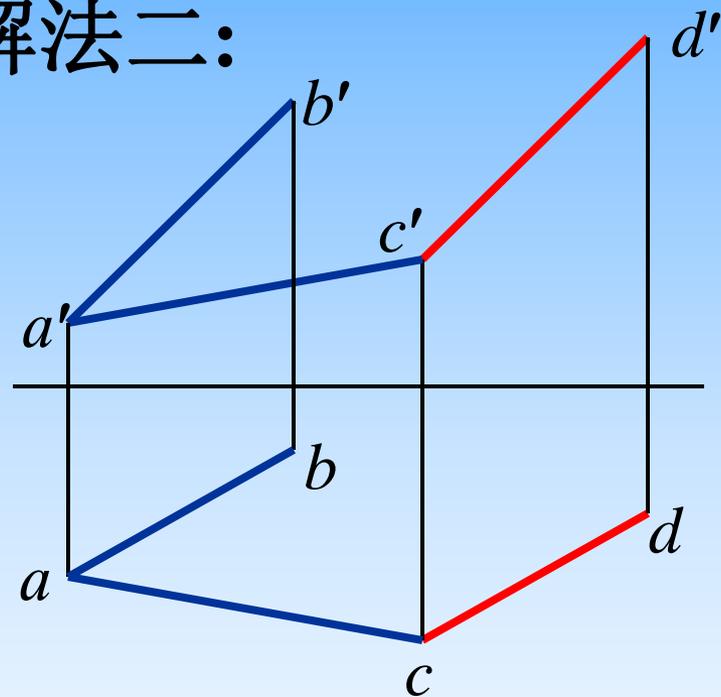


例1：已知平面由直线AB、AC所确定，试在平面内任作一条直线。

解法一：



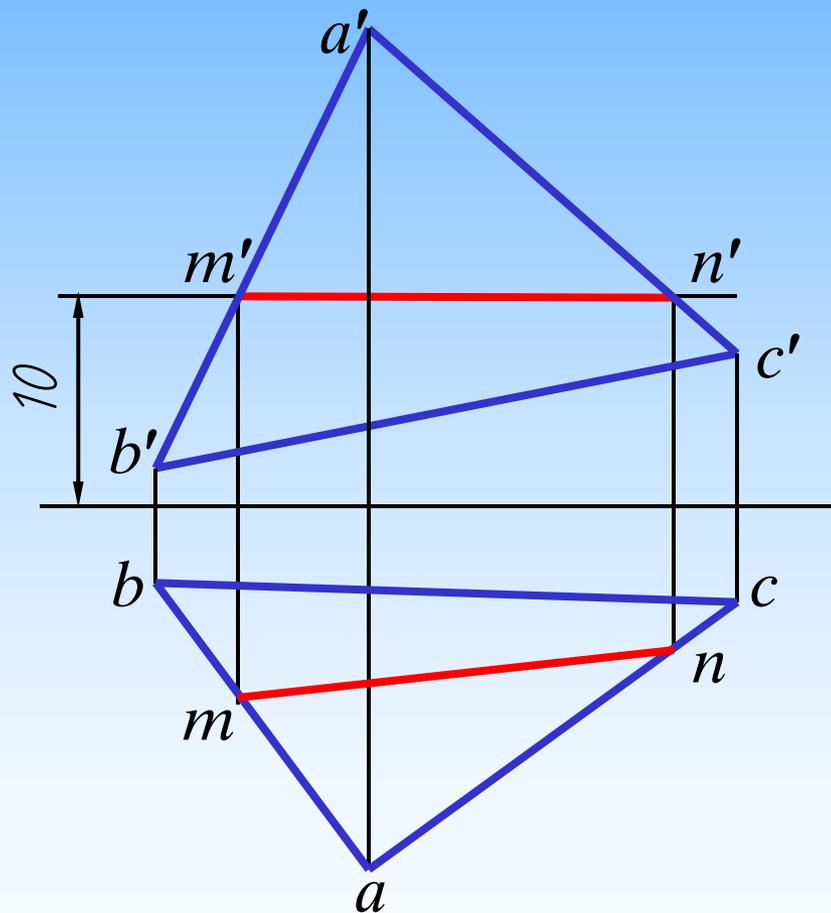
解法二：



有多少解？

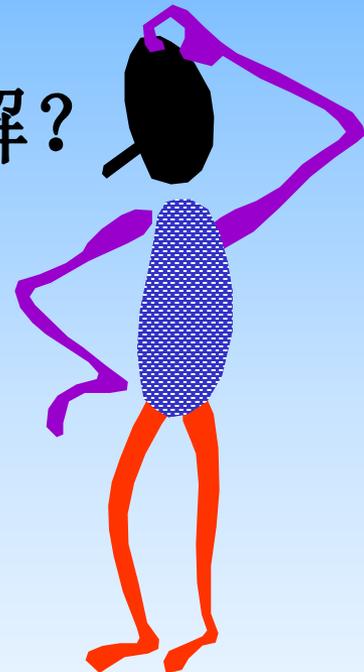
有无数解！

例2：在平面ABC内作一条水平线，使其到H面的距离为10mm。



有多少解？

唯一解！



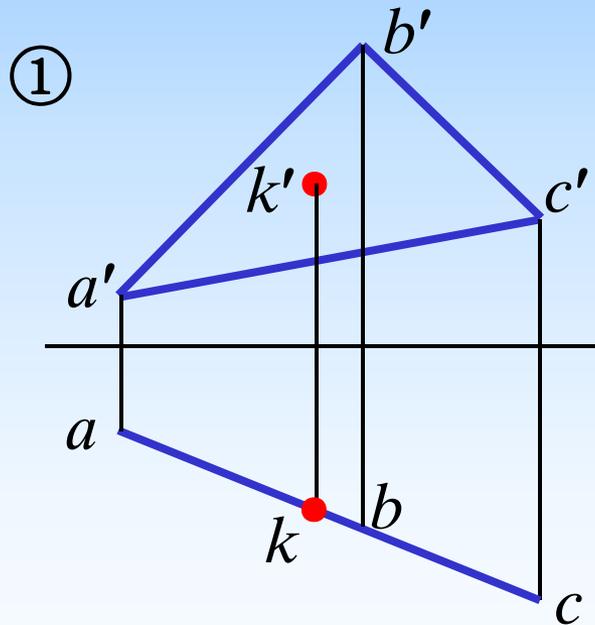
2. 平面上取点

首先面上取线

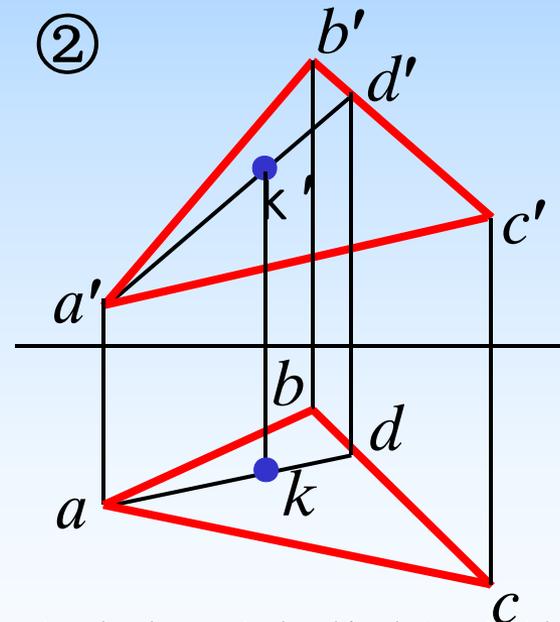
面上取点的方法:

先找出过此点而又在平面内的一条直线作为辅助线，然后再在该直线上确定点的位置。

例1: 已知K点在平面ABC上，求K点的水平投影。



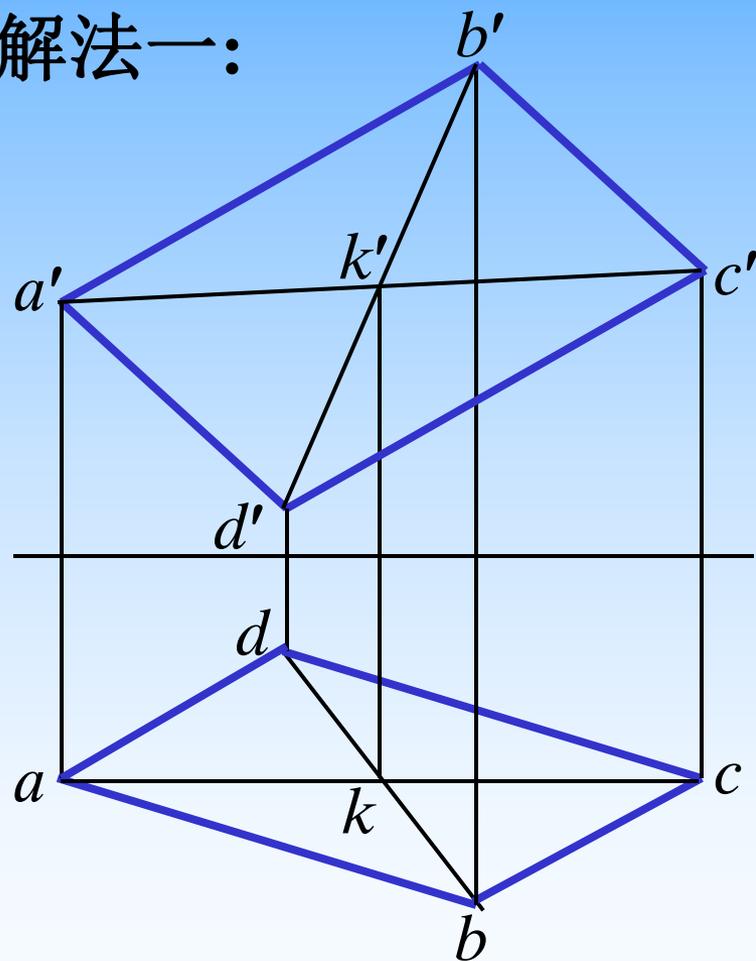
利用平面的积聚性求解



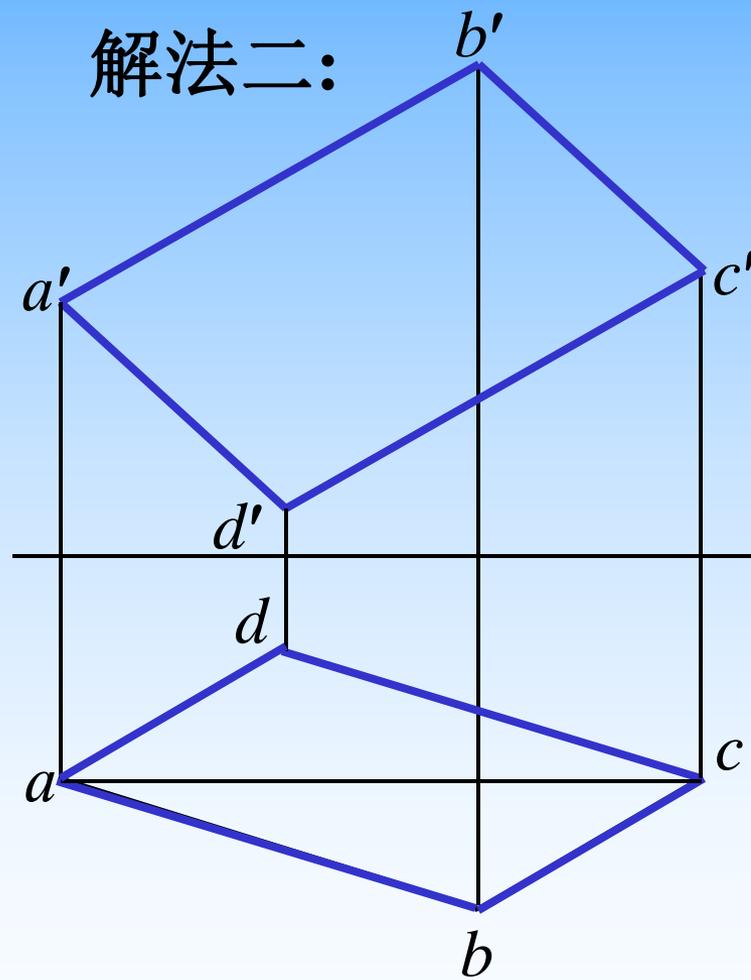
通过在面内作辅助线求解

例2：已知AC为正平线，补全平行四边形ABCD的水平投影。

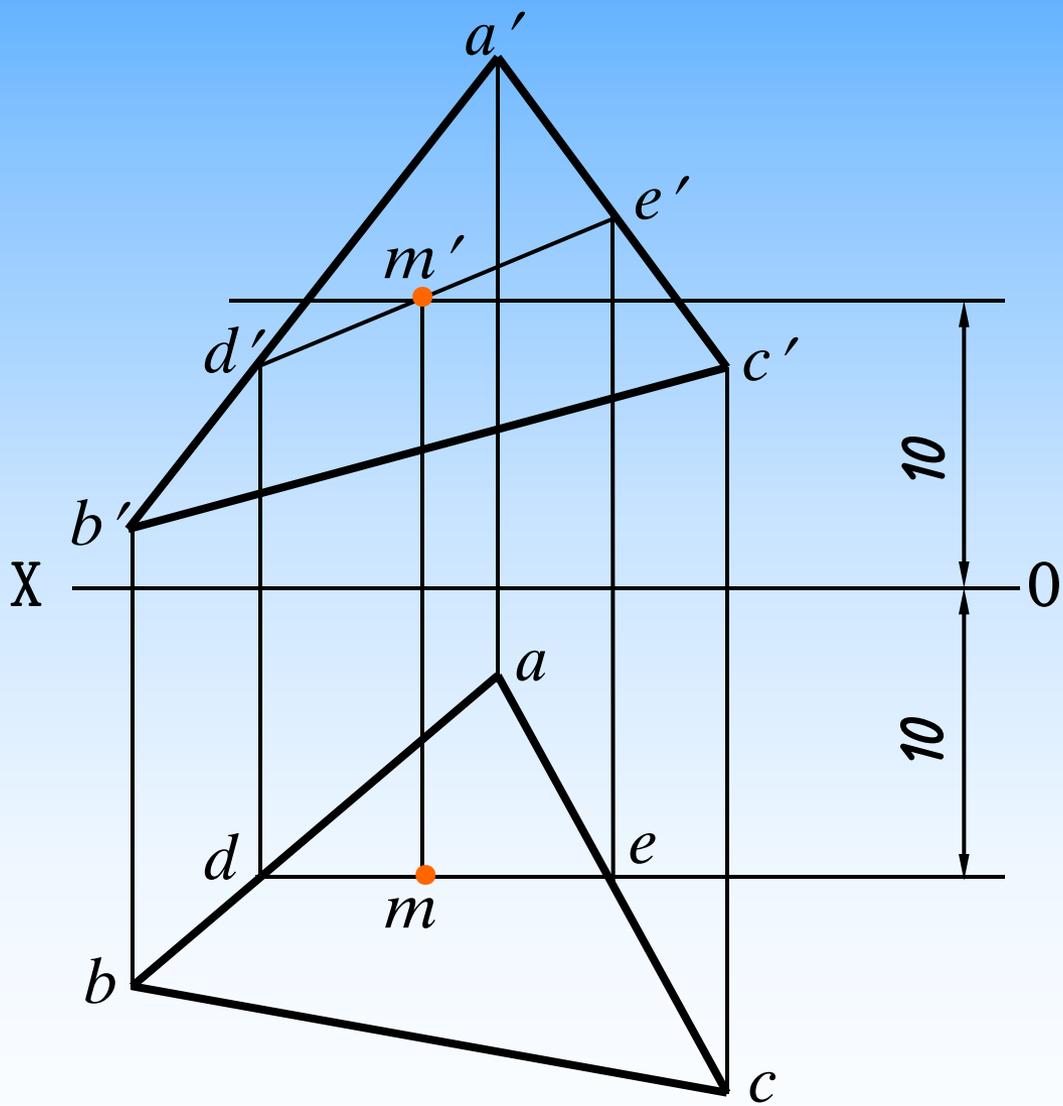
解法一：



解法二：



例3：在 $\triangle ABC$ 内取一点M，并使其到H面V面的距离均为10mm。



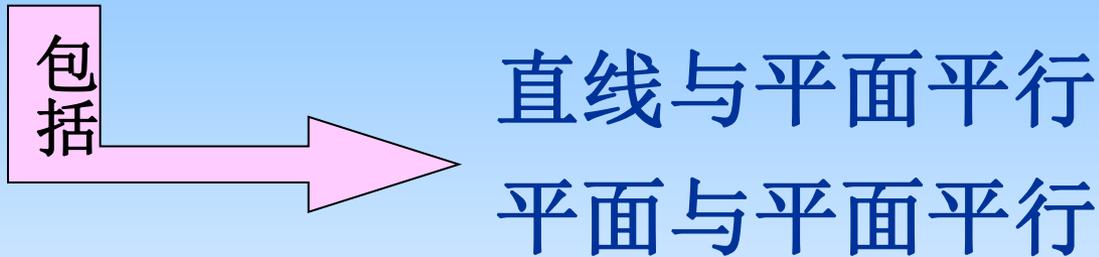
继续？

结束？

2.5 直线与平面及两平面的相对位置

相对位置包括平行、相交和垂直。

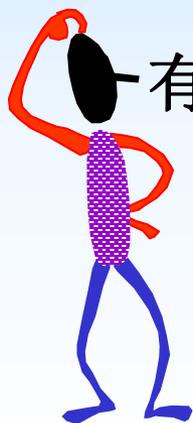
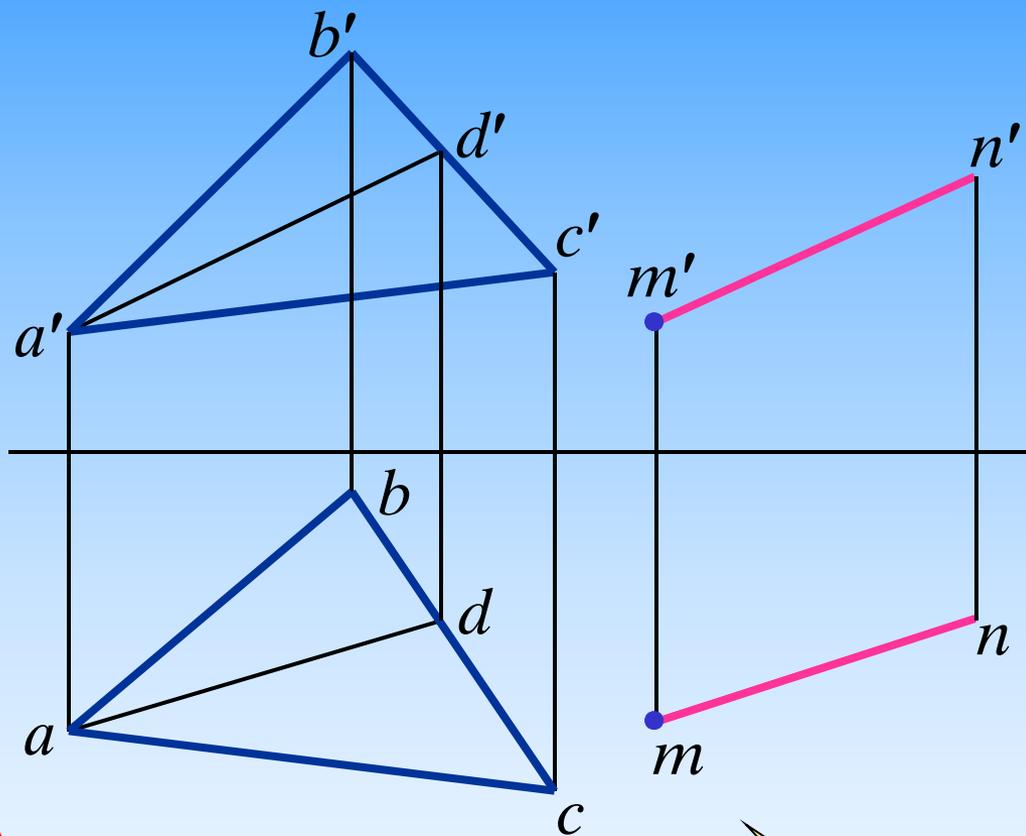
一、平行问题



1. 直线与平面平行

若平面外的一直线平行于平面内的某一直线，则该直线与该平面平行。

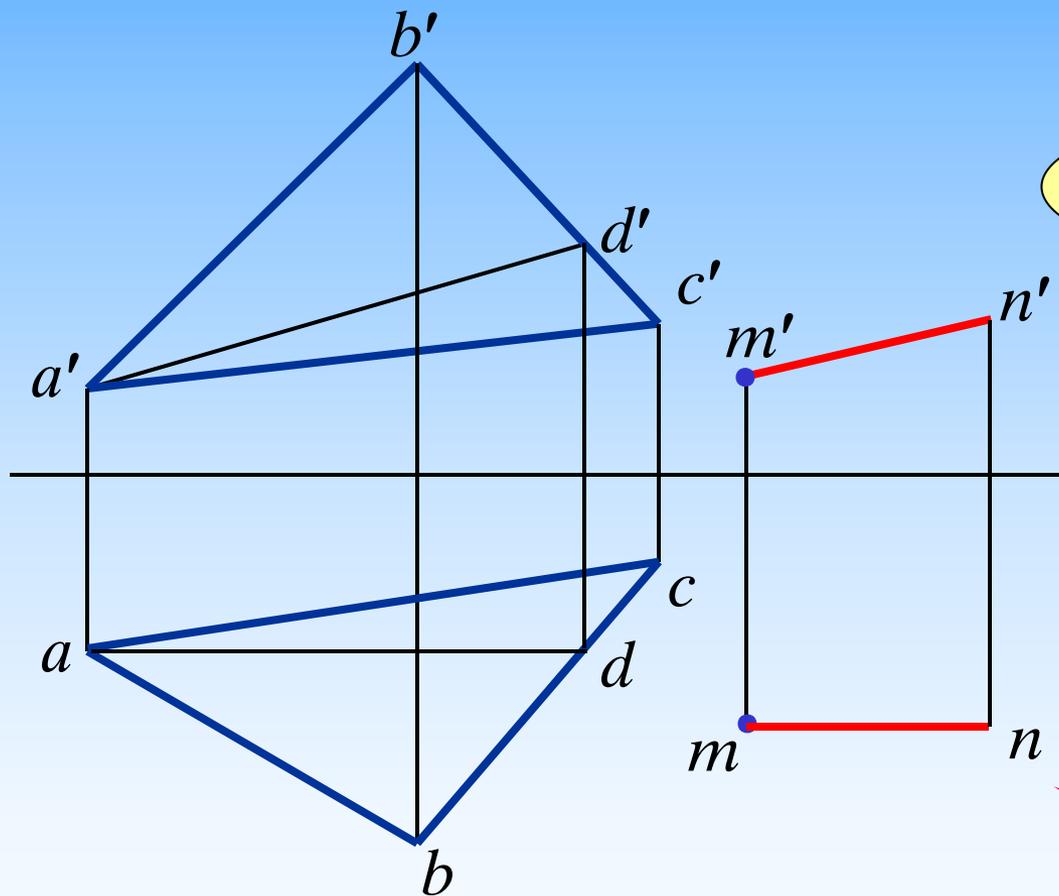
例1：过M点作直线MN平行于平面ABC。



有多少解？

有无数解

例2：过M点作直线MN平行于V面和平面ABC。

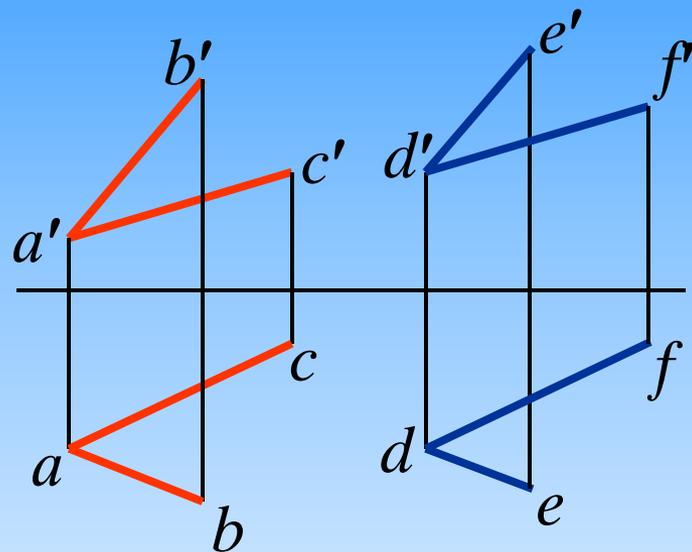


正平线

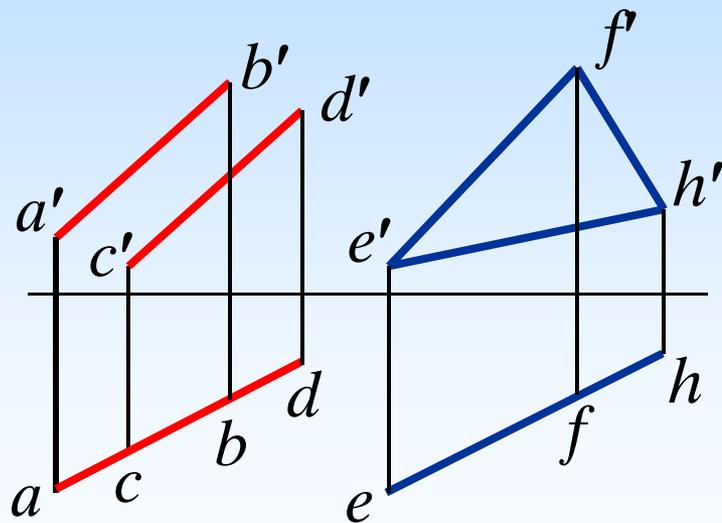
唯一解

2. 两平面平行

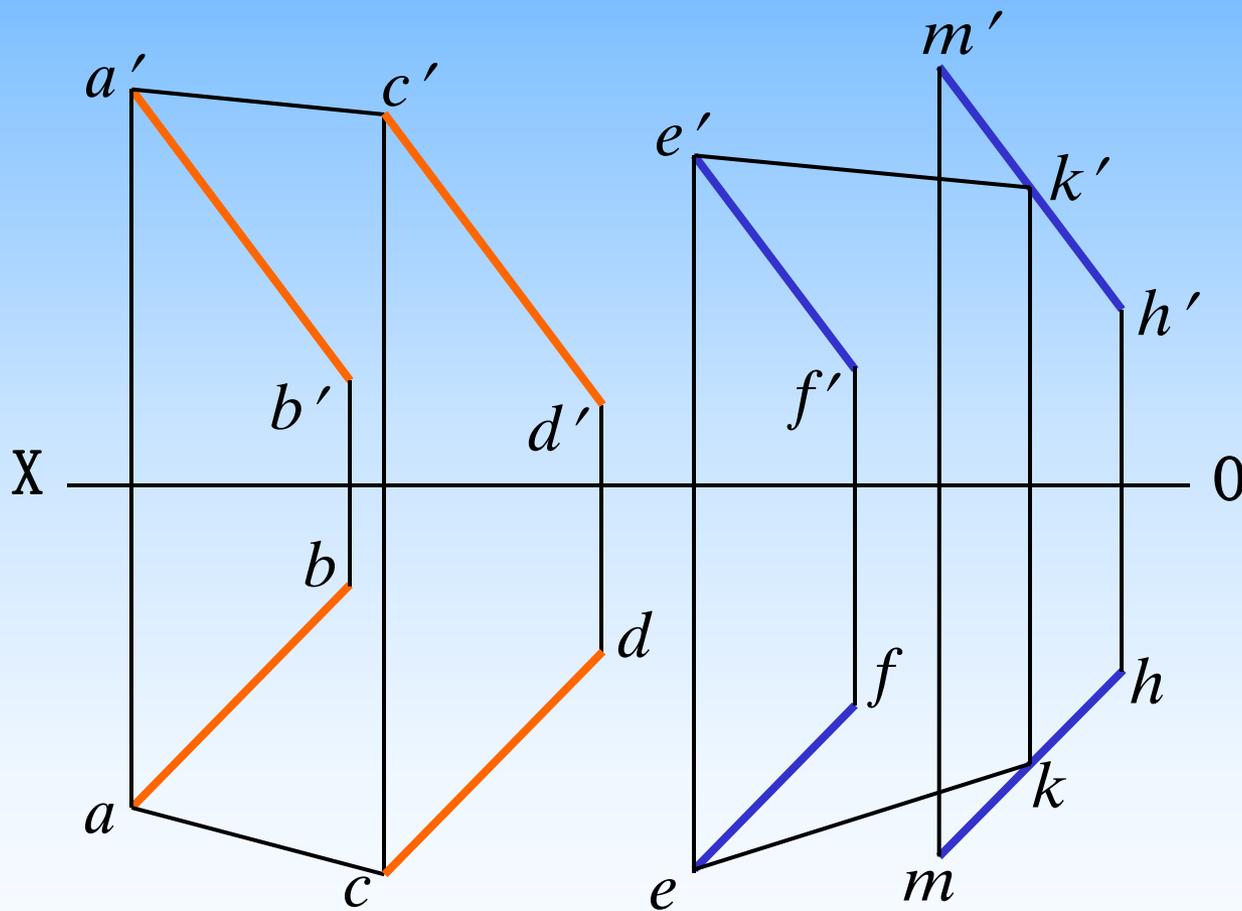
①若一平面上的**两相交直线**分别平行于另一平面上的**两相交直线**，则这两平面相互平行。



②若两**投影面垂直面**相互平行，则它们具有**积聚性**的那组投影必相互平行。

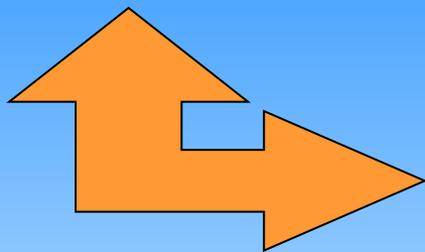


例：判断平面ABDC与平面EFHM是否平行，
已知 $AB \parallel CD \parallel EF \parallel MH$



由于 ek 不
平行于 ac ，
故两平面
不平行。

二、相交问题



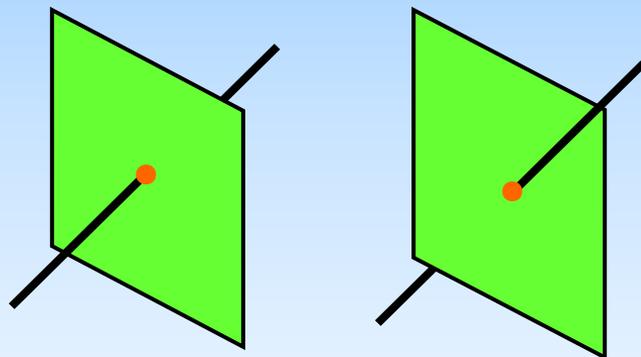
直线与平面相交
平面与平面相交

1. 直线与平面相交

直线与平面相交，其交点是直线与平面的共有点。

要讨论的问题：

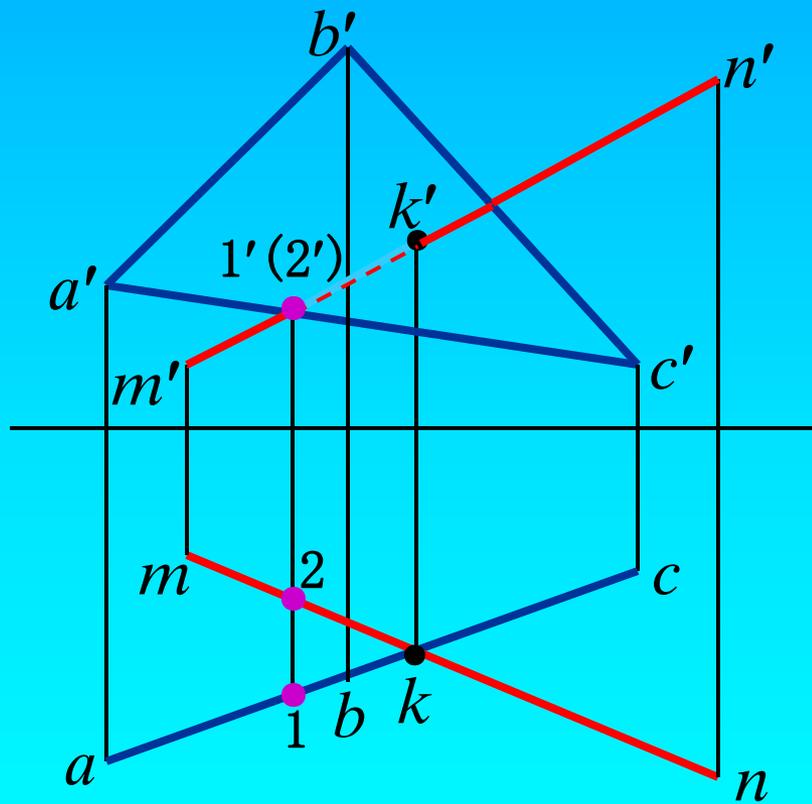
- 求直线与平面的交点。
- 判别两者之间的相互遮挡关系，即判别可见性。



我们只讨论直线与平面中至少有一个处于特殊位置的情况。

例：求直线MN与平面ABC的交点K并判别可见性。

(1) 平面为特殊位置



空间及投影分析

平面ABC是一铅垂面，其水平投影积聚成一条直线，该直线与 mn 的交点即为K点的水平投影。

作图

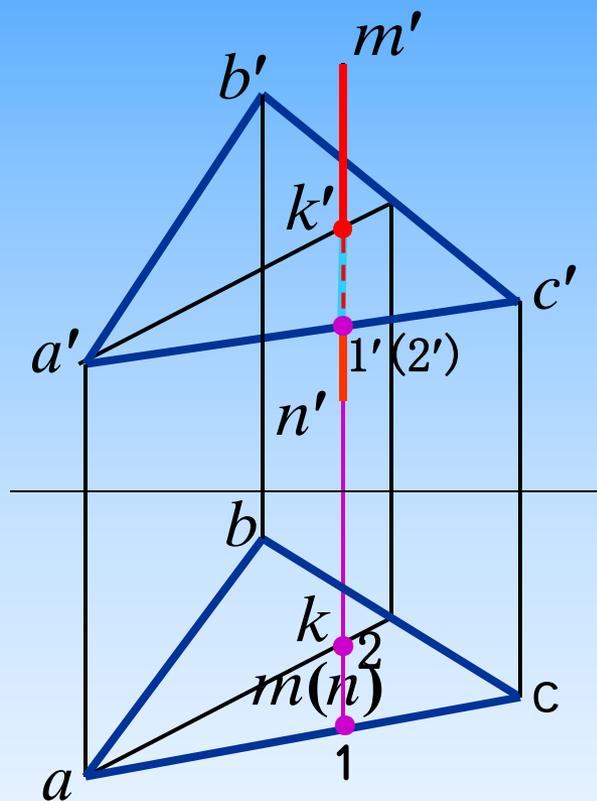
- ①求交点
- ②判别可见性

用线上
取点法

由水平投影可知，KN段在平面前，故正面投影上 $k'n'$ 为可见。

还可通过重影点判别可见性。

(2) 直线为特殊位置



空间及投影分析

直线MN为铅垂线，其水平投影积聚成一个点，故交点K的水平投影也积聚在该点上。

作图

用面上取点法

- ① 求交点
- ② 判别可见性

点 I 位于平面上，在前；
点 II 位于MN上，在后。故 $k'2'$ 为不可见。

2. 两平面相交

两平面相交其交线为直线，交线是两平面的共有线，同时交线上的点都是两平面的共有点。

要讨论的问题：

(1) 求两平面的交线

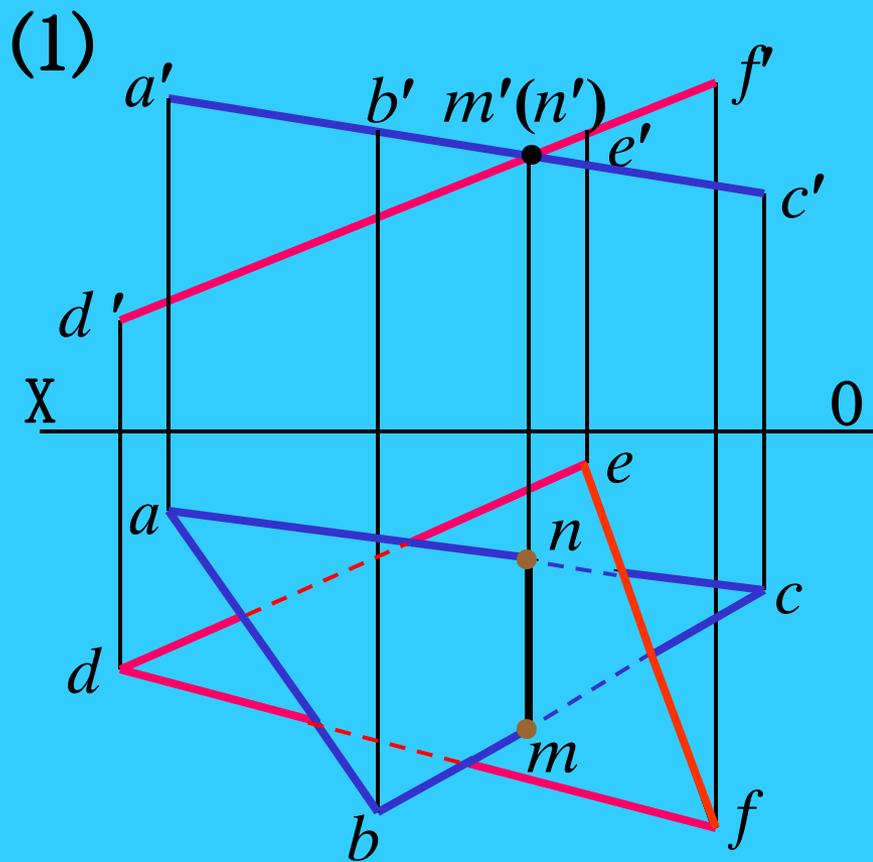
方法：① 确定两平面的两个共有点。

② 确定一个共有点及交线的方向。

(2) 判别两平面之间的相互遮挡关系，即：
判别可见性。

只讨论两平面中至少有一个处于特殊位置的情况。

例：求两平面的交线
MN并判别可见性。



如何判别？
可通过正面投影直观地进行判别。

空间及投影分析

平面ABC与DEF都为正垂面，它们的交线为一条正垂线，两平面正面投影的交点即为交线的正面投影，交线的水平投影垂直于OX轴。

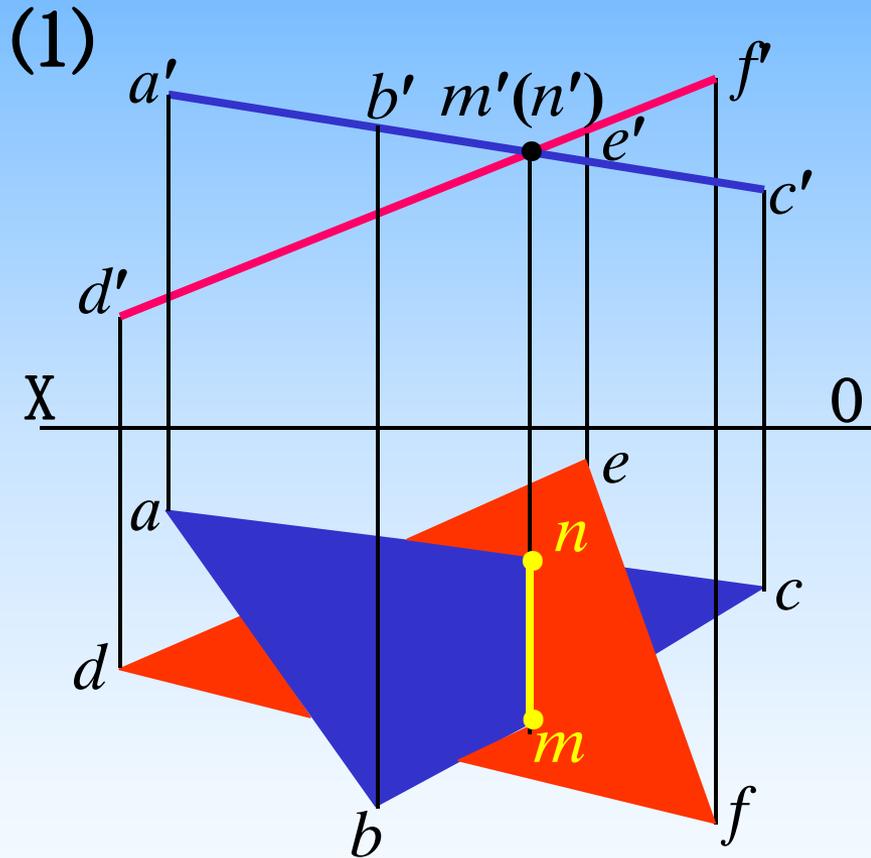
作图

- ① 求交线
- ② 判别可见性

从正面能否不用重影点判别？
ABC在上，其水平投影见。



例：求两平面的交线
MN并判别可见性。



空间及投影分析

平面ABC与DEF都为**正垂面**，它们的**交线为一条正垂线**，两平面正面投影的交点即为交线的正面投影，交线的水平投影垂直于 OX 轴。

作图

- ① 求交线
- ② 判别可见性

从正面投影上可看出，在交线左侧，平面ABC在上，其水平投影可见。

(2)

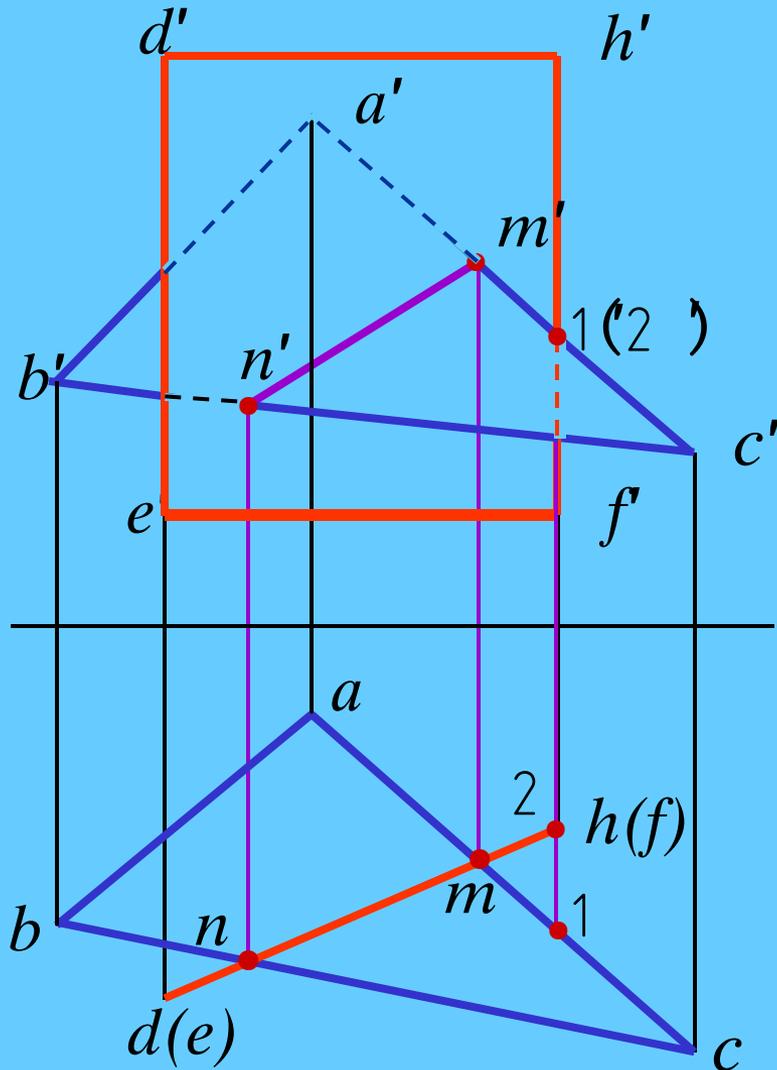
空间及投影分析

平面DEFH是一铅垂面，它的水平投影有积聚性，其与 ac 、 bc 的交点 m 、 n 即为两个共有点的水平投影，故 mn 即为交线MN的水平投影。

作图

- ① 求交线
- ② 判别可见性

点 I 在MC上，点 II 在FH上，点 I 在前，点 II 在后，故 $m'c'$ 可见。



(2)

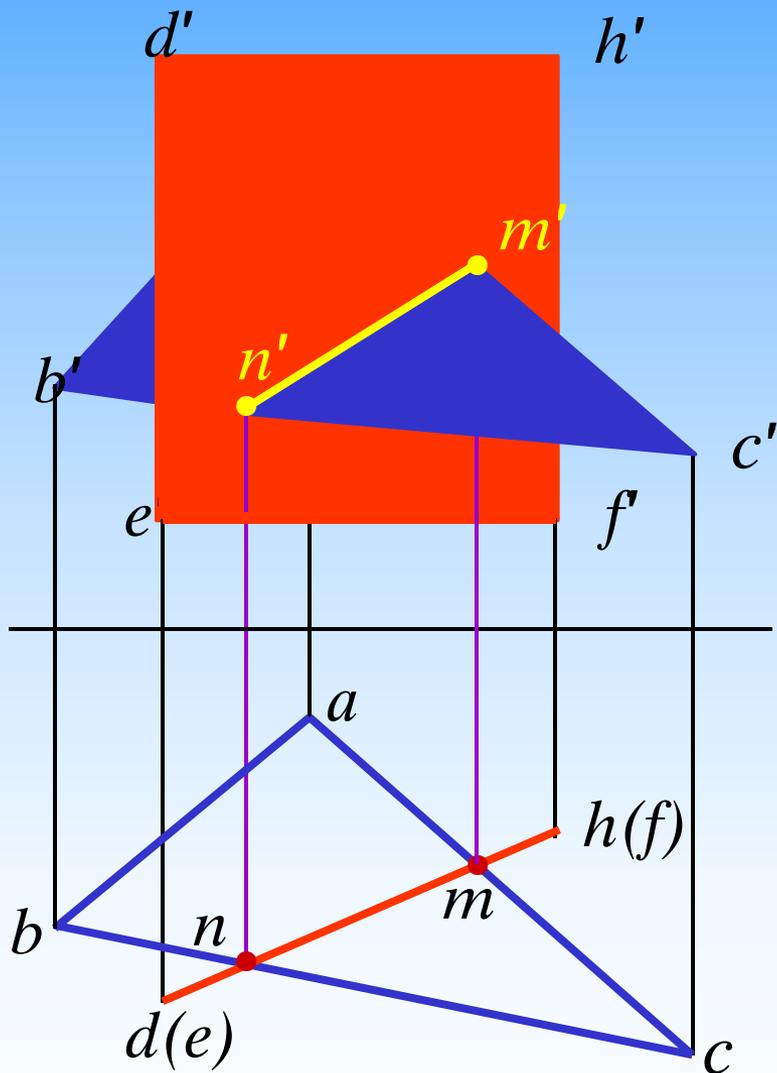
空间及投影分析

平面DEFH是一铅垂面，它的水平投影有积聚性，其与 ac 、 bc 的交点 m 、 n 即为两个共有点的水平投影，故 mn 即为交线MN的水平投影。

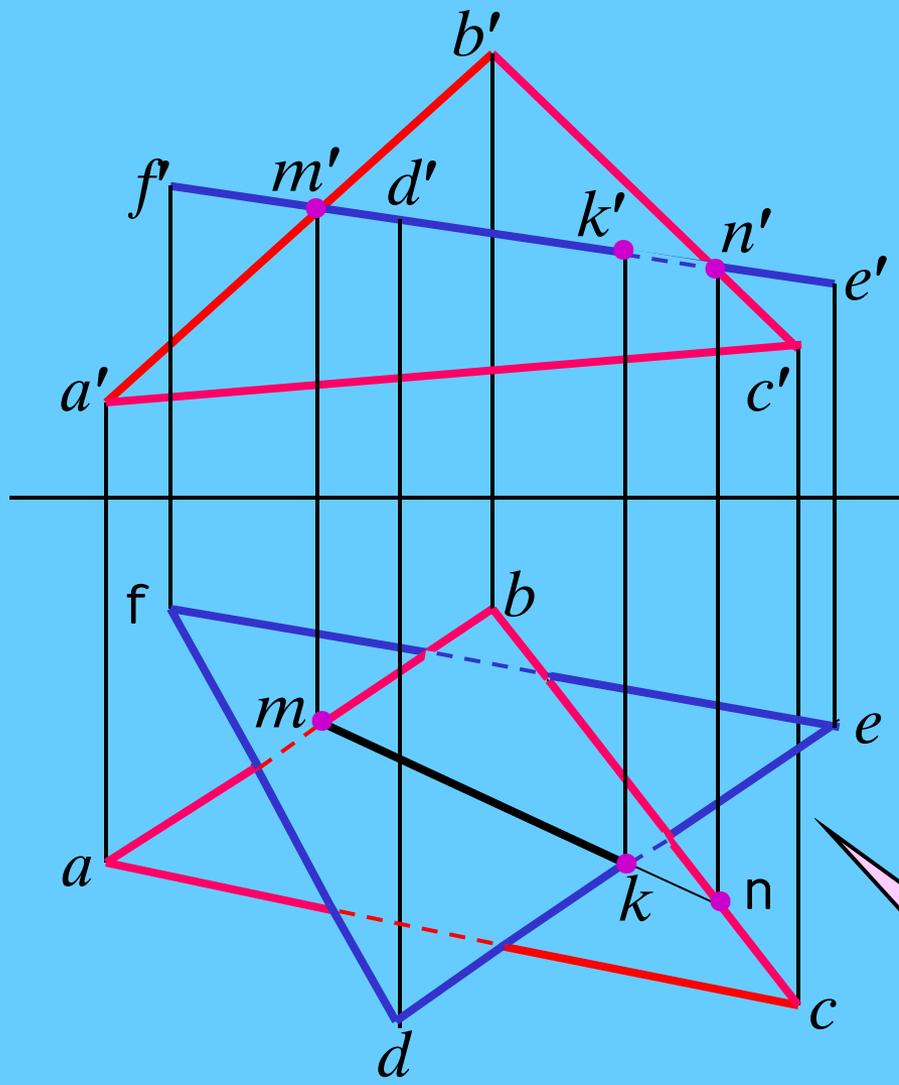
作图

- ① 求交线
- ② 判别可见性

点I在MC上，点II在FH上，点I在前，点II在后，故 $m'c'$ 可见。



(3)



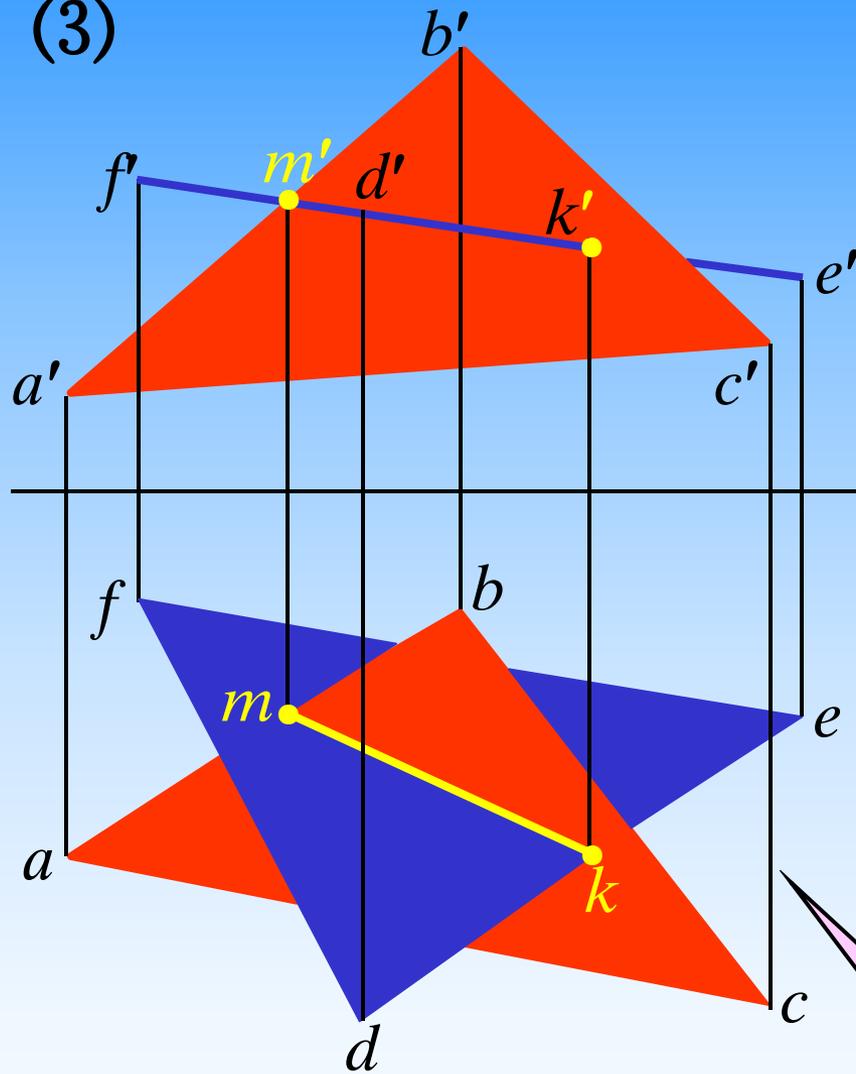
投影分析

N点的水平投影 n 位于 $\triangle def$ 的外面，说明点N位于 $\triangle DEF$ 所确定的平面内，但不位于 $\triangle DEF$ 这个图形内。

所以 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的交线应为MK。

互交

(3)



投影分析

N点的水平投影 n 位于 $\triangle def$ 的外面，说明点N位于 $\triangle DEF$ 所确定的平面内，但不位于 $\triangle DEF$ 这个图形内。

所以 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的交线应为MK。

互交

继续？

结束？

* 小 结 *

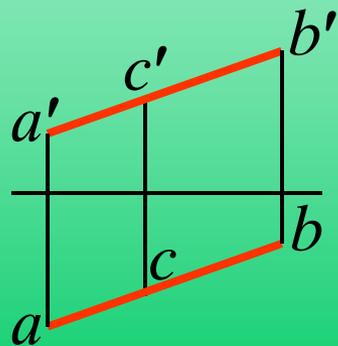
重点掌握:

- ★ 点、直线、平面的投影特性，尤其是特殊位置直线与平面的投影特性。
- ★ 点、直线、平面的相对位置的判断方法及投影特性。

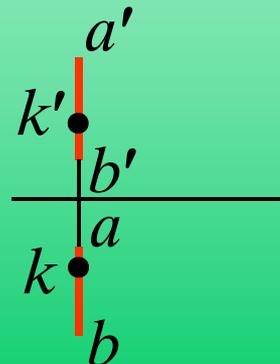
一、直线上的点

1. 点的投影在直线的同名投影上。
2. 点的投影必分线段的投影成定比——定比定理。
3. 判断方法

① 直线为一般位置时



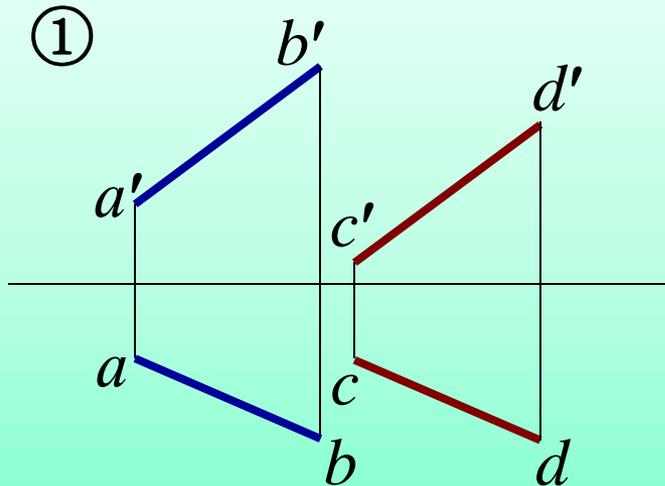
② 直线为特殊位置时



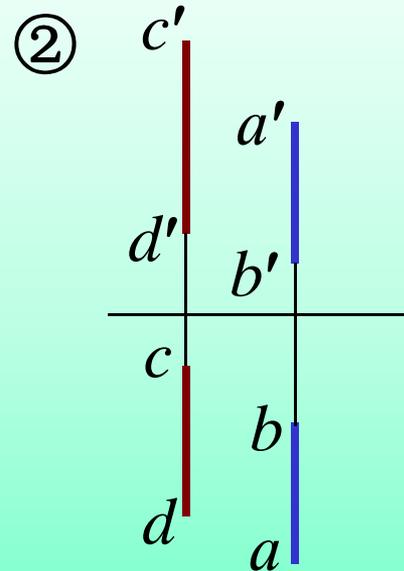
二、两直线的相对位置

1. 平行

同名投影互相平行。



对于一般位置直线，只要有两个同名投影互相平行，空间两直线就平行。



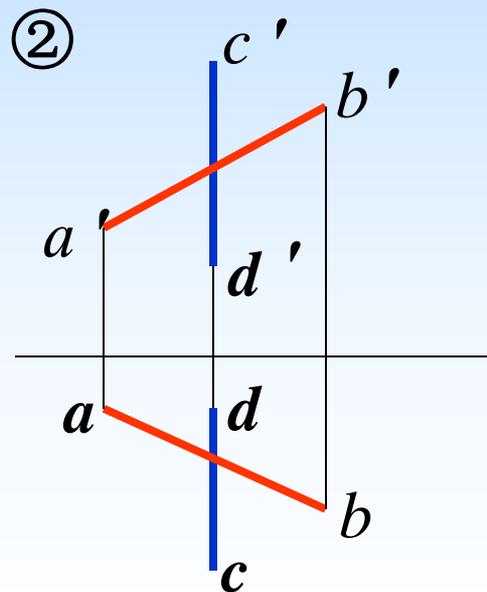
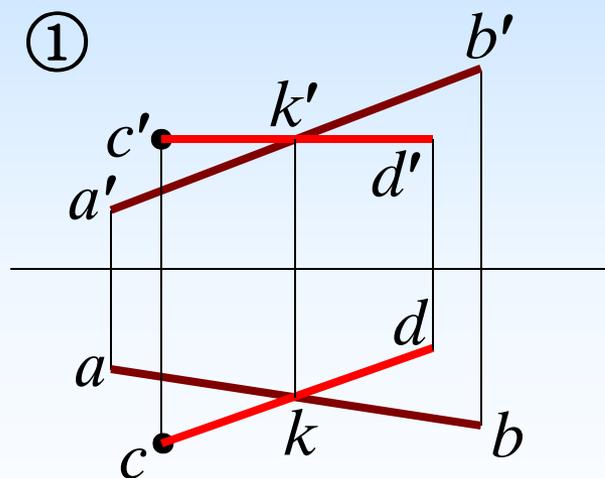
对于特殊位置直线，只有两个同名投影互相平行，空间直线不一定平行。

2. 相交

同名投影相交，交点是两直线的共有点，且符合空间一个点的投影规律。

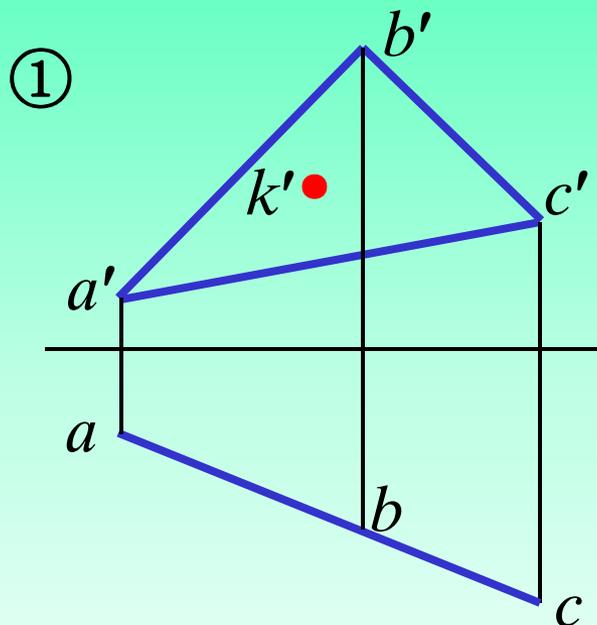
3. 交叉（异面）

同名投影可能相交，但“交点”不符合空间一个点的投影规律。“交点”是两直线上的一对重影点的投影。

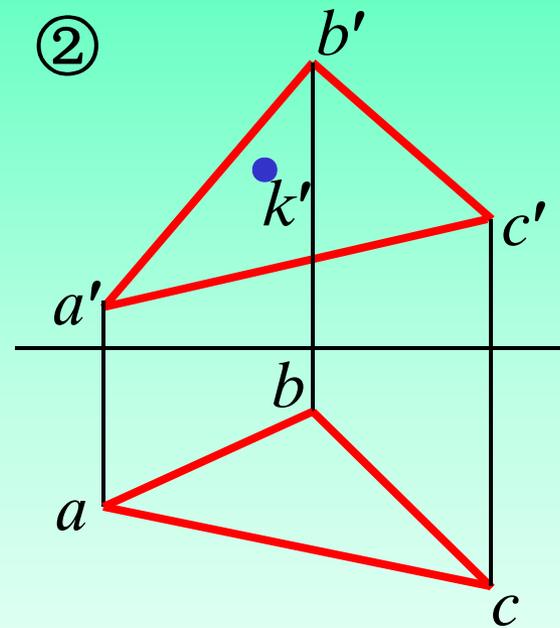


三、点与平面的相对位置

面上取点的方法



利用平面的积聚性求解



通过在面内作辅助线求解

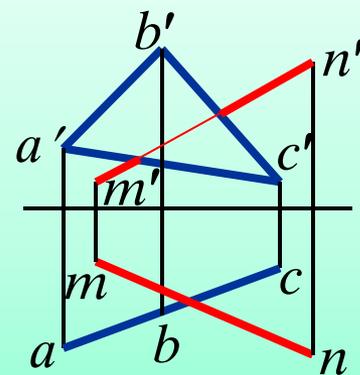
四、直线与平面的相对位置

1. 直线与平面平行

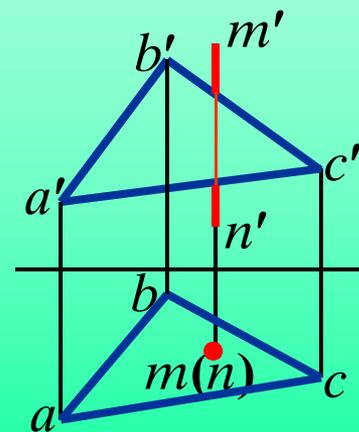
直线平行于平面内的一条直线。

2. 直线与平面相交

(1) 一般位置直线与特殊位置平面求交点，利用交点的共有性和平面的积聚性，采用直线上取点的方法求解。



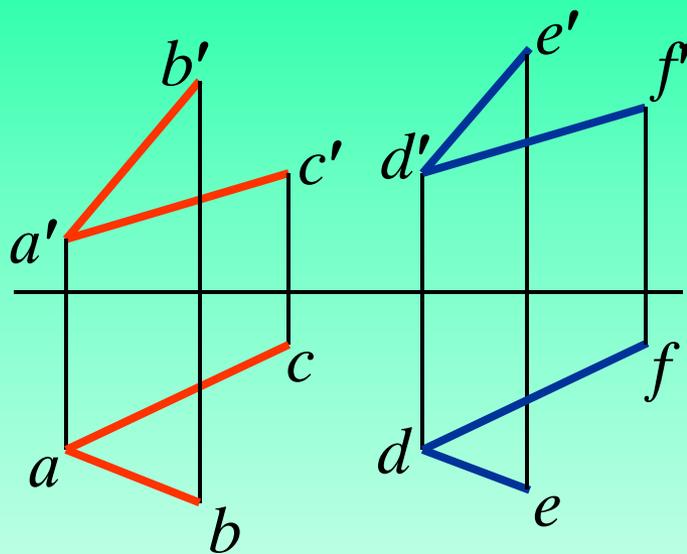
(2) 投影面垂直线与一般位置平面求交点，利用交点的共有性和直线的积聚性，采取平面上取点的方法求解。



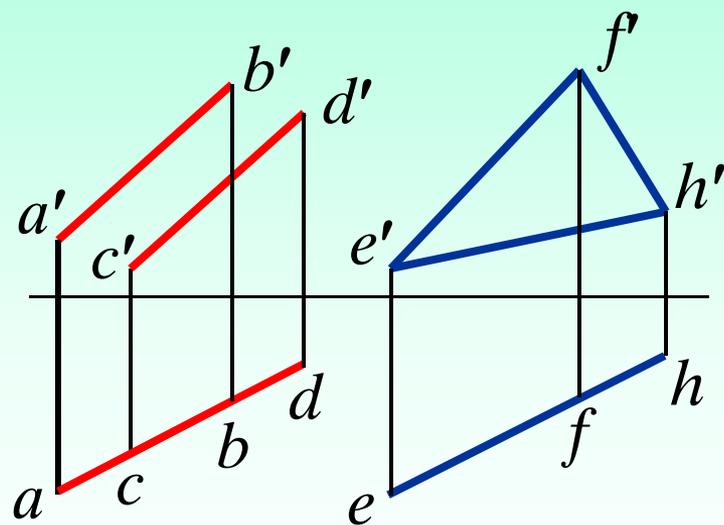
五、两平面的相对位置

1. 两平面平行

(1) 若一平面上的**两相交直线**分别平行于另一平面上的**两相交直线**，则这两平面相互平行。

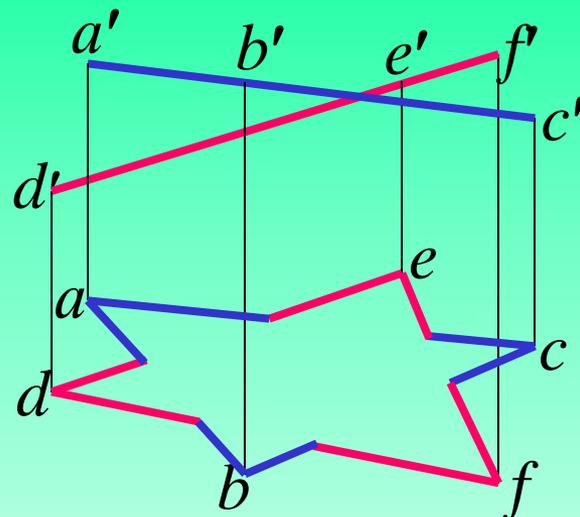


(2) 若两**投影面垂直面**相互平行，则它们具有**积聚性**的那组投影必相互平行。

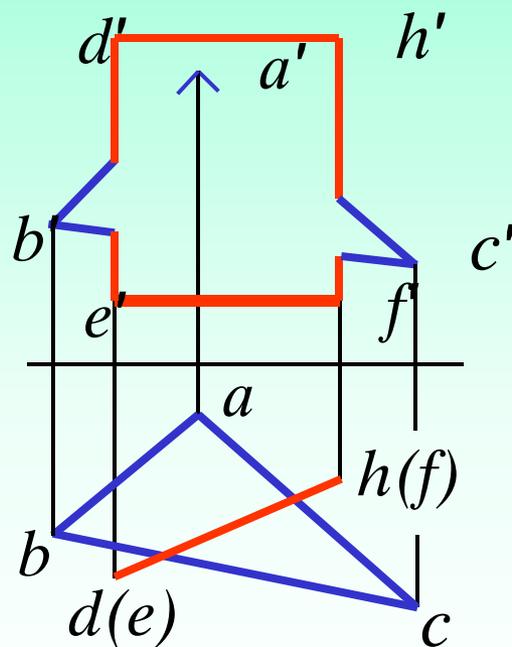


2. 两平面相交

(1) 两特殊位置平面相交，分析交线的空间位置，有时可找出两平面的一个共有点，根据交线的投影特性画出交线的投影。



(2) 一般位置平面与特殊位置平面相交，可利用特殊位置平面的积聚性找出两平面的两个共有点，求出交线。



END